

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

MAGISTERARBEIT

BESTIMMUNG DER BAHNELEMENTE VON EXTRASOLAREN PLANETEN
AUFGRUND VON RADIALGESCHWINDIGKEITSMESSDATEN MITTELS
EVOLUTIONÄRER ALGORITHMEN

Ausgeführt am
INSTITUT FÜR COMPUTERGRAPHIK UND ALGORITHMEN
der Technischen Universität Wien

Unter Anleitung von
UNIV. PROF. DR. GÜNTHER RAIDL

durch
ANDREAS M. CHWATAL
Heinrich-Collinstraße 8-14/9/21
1140 Wien

Zusammenfassung

Vor etwa einem Jahrzehnt wurde der erste Planet ausserhalb unseres Sonnensystems gefunden. Seither ist die Zahl der bekannten Planetensysteme auf mehr als 150 angewachsen, die Tendenz in der Entdeckungsrate ist weiter steigend. Momentan wird durchschnittlich mehr als ein Exoplanet pro Monat entdeckt. Obwohl es verschiedene Methoden zur Suche nach den sogenannten Exoplaneten gibt (Astrometrie, Transit-Methode, Direkte Abbildung), ist die Radialgeschwindigkeitsmethode nach wie vor die erfolgreichste Methode. Nahezu alle bisher gefundenen Planeten wurden auch tatsächlich mit dieser Methode entdeckt.

Die Radialgeschwindigkeitsmethode basiert auf der Tatsache, dass sich Stern und Planet um ihren gemeinsamen Schwerpunkt bewegen. Da der Stern im Allgemeinen viel massereicher als der Planet ist, fällt die Bewegung des Sterns äusserst gering aus. Mittels Präzisionsmessungen kann man die radiale Komponente dieser Bewegung nachweisen, wodurch Rückschlüsse auf vorhandene Planeten möglich sind.

Bisher gängige Reduktionsmethoden basieren durchwegs auf der Fourieranalyse. Mittels Diskreter Fouriertransformation erhält man die dominierenden Frequenzen des Datensamples, womit anschliessend versucht wird einen möglichst guten Sinusfit zu finden. Anschliessend werden Anpassungen vorgenommen, um auch nicht kreisförmige Bahnen in verschiedenen Raumlagen erfassen zu können. Aufgrund dieser iterativen Vorgehensweise ist nicht garantiert, dass tatsächlich für alle Parameter die optimalen Werte gefunden werden.

Bei Mehrplanetensystemen werden zunächst die Parameter des massereichsten Planeten bestimmt, die gefundene Lösung wird dann von den Messdaten subtrahiert, und das verbleibende Signal wieder mit den beschriebenen Methoden untersucht. Der Nachteil hierbei ist, dass sich etwaige Fehler bei dem als erstes bestimmten Planeten durch alle weiteren Planetenlösungen propagieren.

In dieser Arbeit wird ein Evolutionärer Algorithmus, genauer eine (μ, λ) -Evolutionstrategie präsentiert, die einen alternativen Ansatz zur Datenreduktion darstellt. Einer der wichtigsten Vorteile dieser Methode ist das Wegfallen die Annahme der Kreisförmigkeit der Orbits der Fouriermethode. Bei Mehrplanetensystemen ist die Bestimmung der Bahnelemente der massärmeren Planeten weniger durch die gefundenen Lösungen der massereicheren beeinflusst. Durch die entsprechende Erhöhung der Populationsgrösse und der Mutationsrate können auch Lösungen für komplexere Systeme gefunden werden.

Die erfolgreiche Anwendung des Algorithmus auf gut untersuchte Mehrplanetensysteme hat gezeigt, dass die Untersuchung derartiger Systeme mittels dieses Ansatzes effizient möglich ist. Bei noch ungelösten Systemen konnten vielversprechende Kandidatenlösungen ermittelt werden.

Abstract

About one decade ago, the first planet outside our solar system was discovered. Since then, the amount of known systems has increased to more than 150. The rate of the discovery of new planets is increasing more and more. Presently more than one exoplanet per month is discovered on average. Although there exist various methods of planet-discovery (astrometry, transit method, direct imaging) the radial velocity method seems to be the most successful method. Almost all planetary systems have been discovered in that way.

The radial velocity method is based on the fact that planet and star both move around the barycenter of the system. The motion of the star is very low because in contrast to the planet the star has a very high mass. With high precision measurements it is possible to detect the radial component of this motion. This radial velocity measurements lead to the determination of the orbital elements of the planet.

Usual data reduction methods are primarily based on the Fourier analysis. Applying the Discrete Fourier Transform to the data points yields the dominating frequencies. Taking this frequencies, a sine is fitted to the data points whereby only circular orbits can be explained. To find solutions for excentric orbits, some adjustments have to be done. Due to this iterative process it is not guaranteed, that this vector of parameters is really the global optimum of the optimization problem.

Given a planetary system with more than one planet, the usual approach is to find a solution for the planet with the highest mass. This solution is then subtracted from the data sample, and the remaining signal is then processed as described before. The disadvantage of this procedure is that errors in the first solution propagate through every solution for further planets.

In this thesis an alternative approach to the data reduction, namely a (μ, λ) -Evolution Strategy which falls in the category of Evolutionary Algorithms, is presented. The most important advantage is to overcome the shortcoming of the traditional Fourier-based method to favor circular planetary orbits. Further planets in a system are less biased with preceding (higher mass) planet-solutions than with the Fourier-approach. When increasing the size of the population and the mutation-rate, it is increasingly possible to find good solutions, even for more complex systems.

The successful application to well explored systems clearly demonstrated the possibilities of this approach. The analysis of currently not determined systems provided interesting candidate solutions for further investigations.

Danksagungen

Ich möchte meiner Familie, insbesondere meiner Mutter und Großmutter, für die Unterstützung in den letzten Jahren danken. Ohne sie wäre der Weg zum Abschluss meines Studiums ein viel beschwerlicherer gewesen.

Weiters mag ich meinem Betreuer, Prof. Dr. Günther Raidl vom Arbeitsbereich für Algorithmen und Datenstrukturen des Instituts für Computergraphik und Algorithmen der Technischen Universität Wien, meinen Dank für die hervorragende Betreuung und das angenehme Arbeitsumfeld aussprechen.

Besonders danken möchte ich auch Dr. Günther Wuchterl vom Astrophysikalischen Institut der Universität Jena. Neben der Vermittlung zahlreicher Kontakte zu beobachtenden Astronomen, und damit Beobachtungsdaten und Informationen aus erster Hand, war er sofort dazu bereit, die Betreuung des astronomischen Teils der Arbeit zu übernehmen. Ich habe von ihm viele Anregungen erhalten und in zahlreichen Diskussionen entstanden wesentliche Ideen.

Weiterer Dank ergeht an Dr. Eike Günther und Dr. Martin Kürster für das zur Verfügung stellen von Beobachtungsdaten und an Prof. Dr. Werner Tscharnuter und Sebastian Krause für Korrekturvorschläge.

Auch meinen Freunden und Kollegen sei hier, für ihre Unterstützung verschiedenster Art, Dank ausgesprochen.

Inhaltsverzeichnis

	Page
Zusammenfassung	ii
Abstract	iii
Acknowledgements	iv
Inhaltsverzeichnis	v
Tabellenverzeichnis	viii
Abbildungsverzeichnis	ix
Kapitel	
1 Einleitung	1
1.1 Historisches	1
1.2 Extrasolare Planetensysteme	2
1.3 Verschiedene Beobachtungstechniken	2
1.4 Gängige Methoden der Datenreduktion	3
1.5 Datenreduktion mittels Evolutionsstrategien	5
2 Astronomische Grundlagen	6
2.1 Das Zweikörperproblem	6
2.1.1 Bahnelemente	9
2.1.2 Bahnelemente extrasolarer Planeten	10
2.2 Das Keplerproblem	10
2.2.1 Die Keplerschen Gesetze	10
2.2.2 Bahnellipsen	11
2.2.3 Positionsbestimmung	14
2.3 Ableitung der Radialgeschwindigkeit des Sternes	16
2.4 Reale Planetenbahnen	17
2.5 Radialgeschwindigkeitsmessungen	18
2.5.1 Sternspektren	18
2.5.2 Spektrographen	18
2.5.3 Gewinnung der Radialgeschwindigkeitsdaten	19
2.5.4 Messfehler	19
3 Physikalische Aspekte	21
3.1 RV-Beobachtungsprogramme	21
3.2 Statistische Eigenschaften von Exoplaneten	22
3.3 Planetenentstehung	23
3.3.1 Ursprung der Exzentrizitäten	23
3.3.2 Planetare Migration	24
3.3.3 In-Situ-Entstehung	24
3.4 Stabilität der Planetenbahnen	25
4 Evolutionäre Algorithmen	26
4.1 Genetische Algorithmen	27
4.1.1 Kodierungen	28
4.1.2 Rekombination	28

	Rekombinationsoperatoren für Permutationen	28
4.1.3	Mutation	29
4.1.4	Selektion	29
4.1.5	Schema-Theorem	30
4.1.6	Effizienzsteigerung und Constraint Handling	32
4.2	Evolutionsstrategien	33
4.2.1	(μ, λ) -Selektion	33
4.2.2	Mutation	34
	Selbstadaptierung der Strategieparameter	34
	Korrelierte Mutation	35
4.2.3	Rekombination	35
4.3	Diskussion	36
5	Evolutionsstrategie zur Bestimmung der Bahnparameter von Exoplaneten	37
5.1	Vergleich mit ähnlichen Ansätzen	37
5.2	Allgemeines	38
5.3	Zielfunktion	40
5.4	Kodierung	41
5.5	Mutation	42
	5.5.1 Einschränkung des Lösungsraumes	43
5.6	Rekombination	45
5.7	Selektion	46
5.8	Analyse	46
	5.8.1 Mutation	47
	5.8.2 Rekombination	47
6	Implementierung	49
6.1	Programmiersprache	49
6.2	Datenstrukturen	49
6.3	Hauptprogramm	50
	6.3.1 Eingabedatei	50
6.4	Generierung der Plots	52
6.5	Testdatengenerator	53
7	Ergebnisse	54
7.1	Testdatengenerierung	54
7.2	Testergebnisse	55
	7.2.1 Sonnensystem	56
7.3	Anwendung der ES auf Beobachtungsdaten	59
	7.3.1 HD75289	59
	7.3.2 Barnards Pfeilstern	60
	7.3.3 55 Cancri	60
	7.3.4 ν Andromedae	63
8	Zusammenfassung und Diskussion	67
A	Physikalische Konstanten und Astronomische Größen	68
A.1	Physikalische/Astronomische Konstanten	68
A.2	Astronomische Symbole	68
A.3	Größen bezüglich des Sonnensystems	69

B	Verwendete Algorithmen	70
B.1	Lösung der Keplergleichung	70
B.1.1	Newton-Verfahren	70
B.1.2	Bisektion	71
B.2	Erzeugung normalverteilter Zufallszahlen	71
	Literaturverzeichnis	72
	Curriculum Vitae	77

Tabellenverzeichnis

4.1	Definitionen bzgl. des Schema-Theorems	31
5.1	Definitionen.	38
5.2	Zusammenhang der dimensionslosen Strategieparameter mit dem korrespondierenden Parameter.	39
5.3	Zugelassene Wertebereiche der Strategieparameter σ in Abhängigkeit von $\text{red.}\chi^2$ der besten gefundenen Lösung.	40
5.4	Testplanetensystem.	41
5.5	Einschränkungen der Parameterwerte	43
6.1	Elemente des Propertyfiles	51
7.1	Mittelwerte und Varianz der Messfehler verschiedener Beobachtungsdaten	54
7.2	Testdaten für das Sonnensystem.	58
7.3	Vergleich zwischen Period04 und der ES für das 90-Jahres Intervall.	58
7.4	Vergleich zwischen Period04 und der ES für das 30-Jahres Intervall.	58
7.5	Bahnelemente des Planeten bei HD75289	59
7.6	2-Planetenfits zu Barnards Pfeilstern	61
7.7	55 Cnc, 3-Planeten Keplermodell, [MBF ⁺ 02]	61
7.8	Beste mit der ES gefundene 3-Kepler-Lösung des 55 Cnc Systems	62
7.9	In [BMF ⁺ 99] angegebener 3-Kepler-Fit an die ebendort publizierten Daten des Systems v And. Die Werte in den Klammern stellen die jeweiligen Fehler dar.	65
7.10	Mittels der ES ermittelte 3-Kepler-Lösung zum System v And	65
A.1	Physikalische Konstanten	68
A.2	Astronomische Symbole	68
A.3	Größen bezüglich des Sonnensystems	69
A.4	Größenordnungen der Radialgeschwindigkeiten	69

Abbildungsverzeichnis

1.1	RV-Messdaten eines Sterns mit einem Planeten	4
2.1	Bahnelemente (Sonnensystem)	9
2.2	Bahnelemente Extrasolarer Planeten	11
2.3	Bahnellipse	12
2.4	Illustration des dritten Keplerschen Gesetzes, dem Flächensatz	13
2.5	Exzentrischer Kreis zur Konstruktion der Kepler-Gleichung	14
4.1	Unkorrelierte Mutation	35
4.2	Korrelierte Mutation	35
5.1	$\log \chi^2$ Surfaceplot bei Variation der Parameter a_1 und a_2	41
5.2	Graph der Zielfunktion bei Variation jeweils eines Parameters bei einem Planeten in einem 2-Planeten-System. Der linke Plot stellt den Funktionsgraph bei der Variation des Parameters e dar, der rechte Plot jenen bei der Variation von a . . .	42
5.3	Vergleich der Konvergenzrate der (15,100)-ES mit der (15,750)-ES (links) und (15,100)-ES mit der (50,750)-ES (rechts), jeweils 500 Iterationen. Der Funktionsgraph entspricht dem Wert der Zielfunktion $\text{red. } \chi^2$. Bei den Durchläufen wurde weder die Rekombination noch die Hill-Mutation verwendet. Als Datensatz kam das gemäss den Parameterwerten aus Tab. 5.4 generierte 2-Planeten-System zur Anwendung.	47
5.4	Plot der Durchsuchung des Parameterraumes für die Parameter a und m . Die linke Grafik stellt bezieht sich auf den ersten Planeten, die rechte auf den zweiten.	48
6.1	Grobe Darstellung der Datenstruktur und Objekte	50
6.2	Screenshots des Userinterfaces (1).	51
6.3	Screenshots des Userinterfaces (2).	52
6.4	Auszug aus einer Eingabedatei.	52
7.1	Testfall 1.	55
7.2	Testfall 2.	56
7.3	Testfall 3	56
7.4	Testfall 4	57
7.5	Testfall 5. Kurzperiodisches System, die Beobachtungsdaten sind über mehrere Orbits verteilt.	57
7.6	Phasenplot des Planeten bei HD75289.	60
7.7	Phasendiagramm der Lösung 1 zu Barnards Pfeilstern beider Planeten.	61
7.8	Lösung 1 zu Barnards Pfeilstern	62
7.9	Phasendiagramm der Lösung 2 zu Barnards Pfeilstern beider Planeten.	62
7.10	Lösung 2 zu Barnards Pfeilstern	63
7.11	Planet bei 0.115 AE des 55 Cnc Systems	64

7.12 Planet bei 0.24 AE des 55 Cnc Systems	64
7.13 Planet bei ≈ 5.9 AE des 55 Cnc Systems	64
7.14 Gesamtfit(links) und Phasenplot(rechts) des ersten Planeten des Systems ν -And.	66
7.15 Phasenplot der Planeten 2(links) und 3(rechts) des Systems ν -And.	66

Kapitel 1

Einleitung

If We Are Alone in the Universe,
Then It Is an Awful Waste of Space
C. Sagan

In diesem Kapitel wird zunächst ein grober Überblick über Extrasolare Planetensysteme und die damit verbundenen Beobachtungstechniken gegeben. Eine kurze Darstellung bisher gängiger Reduktionsmethoden und den damit verbundenen Schwierigkeiten liefert die Motivation für die Entwicklung eines alternativen Ansatzes. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wird die Funktionsweise des in dieser Arbeit präsentierten Evolutionären Algorithmus grob skizziert und die zu erwartenden Vor- und Nachteile kurz diskutiert.

1.1 Historisches

Im ausklingenden 16. Jahrhundert, also zu einer Zeit, als sich das heliozentrische Weltbild allmählich durchzusetzen begann, bemerkte Giordano Bruno ¹, dass es auch bei anderen Sternen Planeten geben müsse. Obwohl diese Ansicht im 20. Jahrhundert wohl kaum bezweifelt wurde, schien ein direkter Nachweis, aufgrund der erforderlichen hohen Präzision der Messungen lange Zeit aussichtslos.

Im Jahr 1994 gelang es erstmals, Planeten ausserhalb unseres Sonnensystems nachzuweisen. Es handelt sich dabei um drei Planeten mit jeweils 0.02, 4.3 und 3.9 Erdmassen, die sich um den Pulsar PSR 1257+12 bewegen. Ein Pulsar ist der Überrest einer Supernova-Explosion, die oft missverstandene Bezeichnung Pulsar deutet nicht etwa auf eine Pulsation des Sterns hin, sondern kommt daher, dass der Stern in regelmässigen (kurzen) Zeitintervallen Strahlungspulse aussendet. Für genauere Informationen zu Pulsaren siehe [UB99]. An dieser Stelle sei nur gesagt, dass durch die hochgradige Regelmässigkeit der Pulse, Abweichungen von dieser Periodizität eindeutige Rückschlüsse auf den Pulsar umkreisende Planeten zulassen.

Der erste Planet bei einem sonnenähnlichen Stern wurde im Jahr 1995 entdeckt. Er läuft alle 4.2 Tage einmal um den 40 Lichtjahre entfernten Stern 51 Pegasi. Die minimale Masse des Planeten wurde zu 0.46 Jupitermassen bestimmt. Durch diese Entdeckung begann eine neue Ära der Planetenforschung, denn bis dahin war der einzige Prüfstein für Theorien über Stabilität und Entwicklung von Planetensystemen unser eigenes. Mitte 2005 sind 155 extrasolare Planeten in insgesamt 136 Systemen bekannt. Es handelt sich dabei hauptsächlich um Planeten mit Massen ähnlich der des Planeten Jupiter, allerdings auf sehr sternnahen Bahnen, welche sehr kurze Umlaufzeiten bedingen. Es ist jedoch durchaus nicht zu erwarten, dass Planetensysteme ausser unserem generell nur aus solchen sternnahen massereichen Planeten bestehen. Die Eigenschaften

¹Giordano Bruno, 1548-1600, italienischer Philosoph und Dichter. Landete auf dem Scheiterhaufen, weil er ein unendliches Universum und "ketzerische Ansichten" propagierte.

der Systeme des bisher bekannten Samples sind von durch die Beobachtungstechnik bedingten Auswahleffekten bestimmt. Aufgrund der zu erwartenden durch den technischen Fortschritt bedingten steigenden Präzision der Messungen kann davon ausgegangen werden dass in einigen Jahren durchaus auch erdähnliche Planeten (sowohl in Bezug auf Masse als auch Orbit) entdeckt werden.

Im August 2004 wurde ein Planet mit der bis dato geringsten Masse (ausgenommen Pulsar-Planeten) entdeckt. Seine minimale Masse beträgt 14 Erdmassen, er umkreist den rund 50 Lichtjahre entfernten Stern μ Arae in 9.5 Tagen.

Anfang April 2005 wurde das erste direkte Bild eines Exoplaneten von einer Arbeitsgruppe der Universität Jena publiziert [ea05].

Der kanadischer Satellit *MOST* diene neben der Asteroseismologie auch der Planetensuche. Die erste Satellitenmission, in die grosse Erwartungen auf dem Gebiet der Planetensuche gesteckt werden, ist das europäische Projekt *COROT*. Das Weltraumteleskop, mit einem Hauptspiegel von 30 cm Durchmesser, wird voraussichtlich im August 2006 starten. Die Beobachtungsdaten werden erstmals eine Genauigkeit aufweisen, die es ermöglicht, Planeten mit einigen Erdmassen zu entdecken. Die NASA plant 2007 den Start der Mission *Kepler*, die in etwa 100.000 Sterne auf Transits überwachen soll.

1.2 Extrasolare Planetensysteme

Die gar nicht so triviale Frage, was ein Planet eigentlich genau ist, bzw. wie ein Planet genau zu definieren ist, wird unter anderem in [Wuc04] sehr anschaulich behandelt. Als Bezeichnung für Planeten bei anderen Sternen wird der latinisierte Begriff *Extrasolare Planeten* verwendet, der etwas missverständlich ist, wie in [Wam04] nicht ganz ohne Ironie vermerkt ist, denn *„..ausserhalb der Sonne sind wir glücklicherweise auch“*. Als gebräuchlichste Variante hat sich in den letzten Jahren die Kurzform *Exo-Planeten* oder einfach *Exoplaneten* etabliert.

Die meisten bisher bekannten Planetensysteme enthalten lediglich einen Begleiter – genauer gesagt, es wurde aufgrund der bisherigen Beobachtungsdaten nur ein Planet entdeckt! Die prominenteste Ausnahme ist das System 55 Cnc, in welchem 4 Planeten entdeckt wurden. Weitere Systeme mit mehr als zwei Begleitern sind: Ups And und HD 160691. Insgesamt gibt es 14 Mehrplanetensysteme.

Mehr als die Hälfte der Orbits aller entdeckten Planeten haben grosse Halbachsen² kleiner als die der Erdbahn. Die Massen liegen hauptsächlich im Bereich von einer halben bis zu mehreren Jupitermassen. Aufgrund dieser Eigenschaften wird diese Art von Planeten neben *“Pegasi-Planeten”* (im Sternbild Pegasus wurde der erste derartige Planet entdeckt) auch *“Heisse Jupiter”* genannt.

1.3 Verschiedene Beobachtungstechniken

Im Abschnitt 1.1 wurde schon kurz auf die Methode der Entdeckung von Planeten bei Pulsaren eingegangen, welche bei sonnenähnlichen Sternen prinzipiell ausscheidet. Die wahrscheinlich anschaulichste Methode zur Planetenentdeckung bei diesen ist die *Transitmethode*, die 1971 von Rosenblatt [Ros71] genauer untersucht wurde. Bewegt sich der Planet von uns aus gesehen genau vor dem Stern vorbei, bewirkt er durch die Abschattung des Lichtes des Sterns einen charakteristischen Helligkeitsabfall, welcher mittels photometrischer Methoden nachgewiesen werden

²Die Grosse Halbachse der Bahnellipse dient als Maß für die Entfernung des Planeten vom Zentralstern und entspricht dem mittleren Abstand von diesem. Die Umlaufdauer eines Planeten ist ausschliesslich durch die Grosse Halbachse festgelegt.

kann. Der Anteil der Schwächung entspricht genau dem Verhältnis der Flächen des Planeten und des Sterns. Von einem anderen Stern aus betrachtet, würde beispielsweise die Erde einen Abfall der Lichtkurve in der Größenordnung von 10^{-4} , Jupiter etwa $43 \cdot 10^{-2}$ hervorrufen. Bis heute gelang jedoch nur bei sehr wenigen Sternen ein derartiger Nachweis, das prominenteste Beispiel ist der Stern HD209458.

Eine weitere Beobachtungstechnik ist *Microlensing*. Dabei nützt man den, wenngleich auch sehr geringen, Gravitationslinseneffekt eines Sterns, der sich sehr nahe der Sichtlinie zum potentiellen Planetensystem bewegt, aus. Bestimmte charakteristische Verstärkungsmuster des Lichtes des Sterns lassen dann Rückschlüsse auf etwaige Planeten zu. Wenngleich diese Methode auch nicht besonders vielversprechend zu sein scheint, da diese Mikrogravitationslinseneffekte äußerst selten sind, lassen sich damit prinzipiell auch erdähnliche Planeten nachweisen.

Die folgenden beiden Methoden basieren auf der Tatsache, dass sich Planet und Stern aufgrund des Gravitationsgesetzes und verschiedener Erhaltungssätze (Schwerpunkt, Impuls) um ihren gemeinsamen Schwerpunkt bewegen. Durch den Nachweis der Bewegung des Sternes kann man somit indirekt auf die Existenz von Planeten schliessen, sofern man andere Ursachen (Doppelsterne, Braune Zwerge, Sternflecken) ausschliessen kann. Die diesbezüglich erste Möglichkeit stellt die direkte Beobachtung der Bewegung des Sternes dar, und wird *Astrometrische Methode* genannt. Das Problem bei diesem Ansatz ist, dass die Bewegungen des Sternes im Allgemeinen sehr klein ausfallen (im Bereich von Millibogensekunden), mit zunehmender Entfernung des Systems wird dadurch ein derartiger Nachweis immer unwahrscheinlicher. Ein großer Vorteil dieses Ansatzes liegt jedoch darin, dass man aufgrund der Beobachtungsdaten direkt auf die Masse des Planeten schliessen kann, was bei anderen Methoden nicht möglich ist.

Die vielversprechendste und bisher auch am häufigsten erfolgreiche Methode ist die erstmals 1952 von O. Struve [Str52] vorgeschlagene, *Radialgeschwindigkeitsmethode*. Da hierbei nur die radiale Geschwindigkeitskomponente des Sterns gemessen wird, bleibt die genaue Masse des Planeten unbekannt, da keine Aussage über die Bahnebene des Planeten getroffen werden kann. Man erhält jedoch einen Wert für $m \cdot \sin i$, wobei m die Masse des Planeten bezeichnet und i den Winkel der Bahnebene. Im Extremfall $i = 0^\circ$ sehen wir das System exakt “von oben”, und es kommt zu keinem beobachtbaren Effekt (da $\sin 0 = 0^\circ$). Der Fall $i = 90^\circ$ bedeutet, dass wir das System genau “von der Seite” aus sehen, wodurch der Ausdruck $m \cdot \sin i$ der tatsächlichen Masse entspricht. Da die genaue Lage der Bahnebene unbekannt bleibt, kann nur eine Aussage über die minimale Masse des Planeten getroffen werden. Die Messung der Radialgeschwindigkeit (RV) des Sterns basiert auf hochauflösender Spektroskopie. Man beobachtet dabei geringfügige, durch den Dopplereffekt bedingte Verschiebungen der Spektrallinien des Sterns. Eine genauere Beschreibung dieser Methode ist in Abschnitt 2.5 zu finden.

1.4 Gängige Methoden der Datenreduktion

Ziel der Datenreduktion ist es, aufgrund der RV-Daten Rückschlüsse auf die tatsächlichen Bahnelemente³ der Planeten ziehen zu können. Die wichtigsten Bahnelemente sind die Masse M und der Abstand vom Zentralstern (große Halbachse⁴ a). Weitere Parameter sind die “Form der Bahnellipse” (Exzentrizität e), die durch den Winkel ω bestimmte Lage der Bahn⁵, und eine Anfangsbedingung für die Position des Planeten, welche in Form des Zeitpunktes des Periastrondurchganges⁶ gegeben ist. Die Bahnneigung (Inklination i) ist bei RV-Methode generell nicht

³siehe Abschnitt 2.1.1

⁴Die Umlauffrequenz des Planeten ist ausschliesslich durch diesen Parameter bestimmt

⁵Genau genommen handelt es sich hierbei um die Summe zweier Winkel in verschiedenen Ebenen. Für eine genauere Beschreibung sei auf Abschnitt 2.1.1 verwiesen.

⁶Das Periastron ist der sternnächste Punkt der Planetenbahn. Ein Zeitpunkt eines Periastrondurchganges legt die Position des Planeten auf seiner Umlaufbahn für beliebige Zeiten fest.

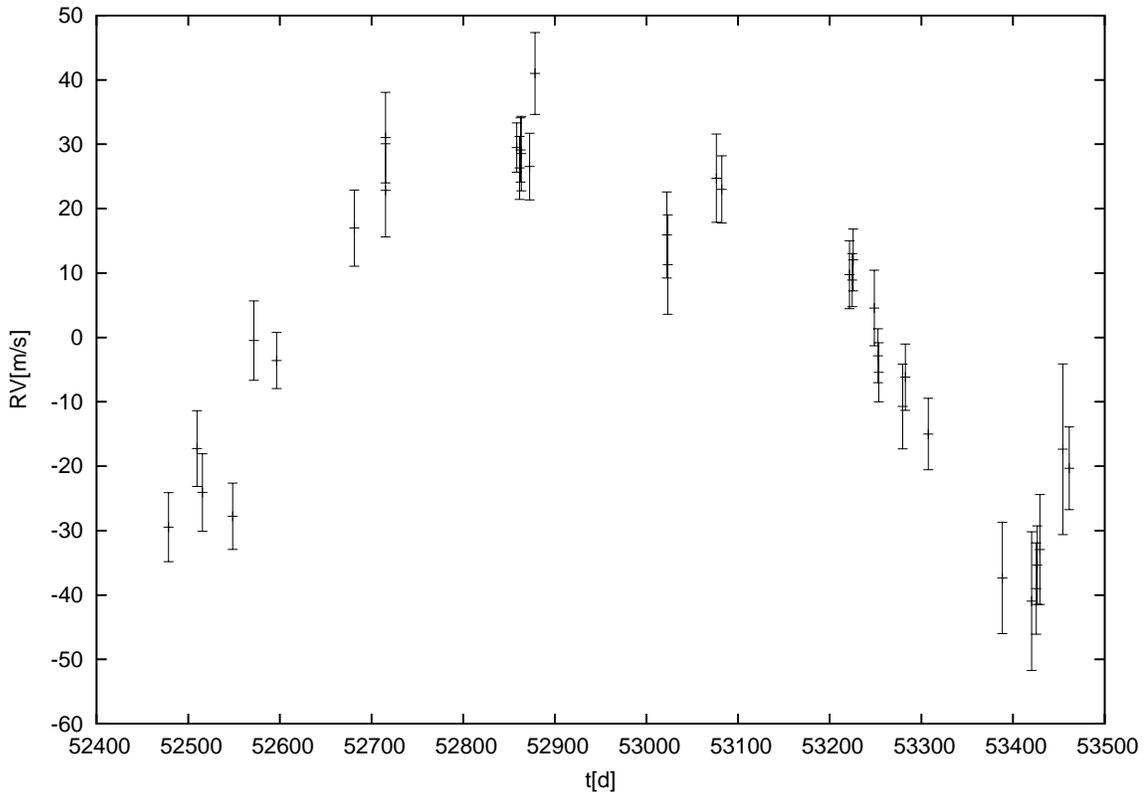


Abbildung 1.1: RV-Messdaten eines Sterns mit einem Planeten

bestimmbar.

Das Resultat der RV-Messungen sind fehlerbehaftete, bzgl. der Zeitintervalle ungleichmässig verteilte Messpunkte (siehe Abb. 1.1). Die Fehler haben ihre Ursache in: Belichtungszeit, Spaltöffnung, Photonenstatistik, Anzahl der verwendeten Spektrallinien, etc.

Die bisher gängigen Reduktionsmethoden basieren weitgehend (soweit aus Publikationen und Gesprächen mit beobachtenden Astronomen zu entnehmen ist) auf der Fourieranalyse. Dabei wird zunächst eine diskrete Fourier-Transformation auf den Datensatz angewandt. Als Ergebnis erhält man ein Frequenz-Spektrum, wobei die maximale Frequenz der Umlaufzeit des Planeten entspricht, wodurch die große Halbachse bestimmt ist. Mit dieser Information versucht man dann einen möglichst guten Sinus-Fit $f_{RV}(t) \approx A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ mit der gefundenen Frequenz ω zu finden. Die Amplitude A des Fits ergibt somit die Masse des Planeten. Aus der Phasenverschiebung φ kann auf t_0 geschlossen werden. Die grössten Schwierigkeiten bereiten die beiden verbleibenden zu bestimmenden Parameter. Eine von Null verschiedene Exzentrizität bedeutet, dass die resultierende RV-Funktion $f_{RV}(t)$ nicht mehr durch *eine* Sinusschwingung darstellbar ist, sondern vielmehr die entsprechende Fourier-Reihe unendlich viele Koeffizienten hätte. Die “Form” der Funktion bei $e \neq 0$ hängt stark von ω ab.

Enthält ein System mehrere Planeten, so wird zunächst die erste Lösung von den Daten abgezogen, und das verbleibende Signal mittels der selben Vorgehensweise analysiert. Ein grosser Nachteil hierbei ist, dass Fehler beim ersten Planeten den Signalanteil des zweiten Planeten verfälschen usw. Ein weiteres Problem ist, dass nach Anpassung der Exzentrizität e wieder Korrekturen an der Masse M vorgenommen werden müssen, bzw. nach der ersten Bestimmung von ω wiederum Korrekturen an e , M und t_0 - und vice versa. Setzt man also die Frequenz als bekannt voraus, verbleibt noch immer das Problem der Bestimmung von vier Parametern pro Planet.

Es ist zu erwarten, dass hohe Exzentrizitäten bei dieser Methode zu Problemen führen. Bei Mehrplanetensystemen sind alle Planeten durch die Ergebnisse der (in der Datenreduktion vorangehenden) Planeten mit grösserer Masse beeinflusst.

Es gab jedoch auch schon Ansätze mit Genetischen Algorithmen ([LC95], [LC01], [LC02], [GKM03], [GKM05]). Es wurden hierbei durchwegs Standardimplementierungen Genetischer Algorithmen verwendet, bei welchen die kontinuierlichen Parameter in binär kodierter Form dargestellt wurden. Die damit verbundenen (am Anfang von Kapitel 5 beschriebenen) Nachteile und Probleme führen direkt zu dem (ebenfalls in Kapitel 5 beschriebenen) Ansatz mittels Evolutionsstrategien.

1.5 Datenreduktion mittels Evolutionsstrategien

Bei der Optimierung kontinuierlicher (fehlerbehafteter) Parameter sind die in den sechziger und siebziger Jahren des 20. Jahrhunderts von Ingo Rechenberg und Hans-Paul Schwefel entwickelten, in die Klasse der Evolutionären Algorithmen fallenden *Evolutionsstrategien (ES)* sehr erfolgreich.

In den folgenden Kapiteln dieser Arbeit wird die Anwendung von Evolutionsstrategien auf das Problem der Bestimmung der Bahnelemente von Exoplaneten beschrieben. ES arbeiten mit Populationen von Lösungen, welche während des Programmablaufes mutiert (optional auch rekombiniert) und bewertet werden. Aus den besten entstandenen Individuen wird dann die nächste Generation gebildet. Zusätzlich zu den eigentlichen Parametern werden Strategieparameter mitoptimiert, welche die Entwicklung der Population positiv beeinflussen und steuern sollen. Für genauere Details zu Evolutionären Algorithmen sei auf Kapitel 4 verwiesen.

Ein Individuum ist in diesem Fall ein Objekt, welches ein vollständiges Planetensystem, und damit eine mögliche Lösung, darstellt. Die Bewertung erfolgt über die Berechnung der Orbits entsprechend der Keplerschen Gesetze, und anschließender Rückrechnung auf die Radialgeschwindigkeit des Sternes aufgrund des Schwerpunktsatzes.

Mittels grosser Populationen und einer hohen Mutationsrate ist zu erwarten, dass auch komplexere Systeme lösbar sind – natürlich auf Kosten der Laufzeit. Die gewonnenen Lösungen sind nicht durch vorübergehende Annahmen, wie z.B. die der Kreisförmigkeit der Bahn, beeinflusst und dadurch gewissermaßen objektiver. Die Vorgehensweise ist dahingehend physikalischer als die Fouriermethode, da von Anfang an Modelle möglicher (stabiler) Planetensysteme zur Lösungssuche herangezogen werden. Bei Einplanetensystemen ist zu erwarten, dass die ES eine genauere Bestimmung der Parameter, und damit geringere Residuen des Datenfits liefert. Bei Mehrplanetensystemen können möglicherweise Systeme erkannt und bestimmt werden, die mit den gängigen Methoden nicht lösbar sind. Allerdings wird man mit gängigen PCs bei Dreiplanetensystemen an die Grenze der Praktikabilität stossen. Aufgrund der hohen Parallelisierbarkeit von Evolutionsstrategien könnte jedoch der Einsatz auf Gross- und Parallelrechnern auch bei komplexeren Systemen plausible Lösungen liefern.

Kapitel 2

Astronomische Grundlagen

Die Körper wären nicht schön,
wenn sie sich nicht bewegten.
J. Kepler

Dieses Kapitel präsentiert die astronomischen und ebenfalls die damit verbundenen physikalischen und mathematischen Grundlagen bezüglich der Berechnung von Planetenbahnen. Schon das Dreikörperproblem, also die Bewegung dreier Planeten, die als Punktmassen angenommen werden, ist im Allgemeinen nicht mehr analytisch lösbar und die Bahnen müssen durch numerische Integration bestimmt werden. Möchte man jedoch die Planetenpositionen nur in relativ kurzen Zeitintervallen bestimmen, können die Störungen der Planeten untereinander oftmals vernachlässigt werden, und das gesamte System als Summe von Zweikörperproblemen aufgefasst werden. Die näherungsweise Bestimmung der Bewegung eines Körpers in einem Gravitationspotential nennt man *Kepler-Problem*¹, welches die Grundlage für den im Kapitel 5 vorgestellten Algorithmus ist.

Im letzten Teil dieses Kapitels wird kurz auf die Gewinnung der Radialgeschwindigkeitsdaten mittels hochauflösender Spektroskopie eingegangen.

2.1 Das Zweikörperproblem

Die Behandlung des Zweikörperproblems stellt die physikalische Grundlage für die Diskussion des Keplerproblems im nächsten Abschnitt dar. Dieses Kapitel orientiert sich an der Darstellung des Zweikörperproblems in [Fli03]. Wir betrachten ein abgeschlossenes System von zwei Körpern an den Orten \vec{r}_1 und \vec{r}_2 mit den Massen m_1 und m_2 . Die Lagrangefunktion ($\mathcal{L} = T - U$) des Systems lautet damit

$$\mathcal{L}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) = \frac{m_1}{2} \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\vec{r}}_2^2 - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|), \quad (2.1)$$

wobei T die kinetische, und U die potentielle Energie bezeichnet.

Die Gravitationskräfte werden durch das Zentralpotential U dargestellt, welches nur vom Abstand der beiden Körper abhängt. Das Problem ist symmetrisch gegenüber

1. Translationen,
2. Rotationen,
3. Zeittranslationen,

wodurch sich die folgenden Erhaltungsgrößen ergeben:

1. Schwerpunktimpuls,

¹Johannes Kepler wurde am 27. Dezember 1571 in Weil der Stadt geboren. Kepler war Astronom, Mathematiker und Optiker. Er ist vor allem bekannt für die Entdeckung der Planetengesetze und einem Verfahren zur numerischen Integration (Keplersche Fassregel). Zu seinen Hauptwerken zählen: *Harmonices Mundi*, *Astronomia Nova*, *Dioptrice* und die *Tabulae Rudolphae*. Kepler starb am 15. November 1630 in Regensburg.

2. Drehimpuls,
3. Energie.

Durch die Einführung geeigneter Koordinaten treten diese Symmetrien in der Lagrangefunktion eindeutig hervor. (1) ermöglicht dadurch die Reduktion zu einem Einteilchenproblem und (2) die Reduktion zu einer Radialgleichung. Aufgrund von (3) hängt die Lagrangefunktion nicht explizit von der Zeit ab.

Durch die Einführung der Schwerpunktkoordinate,

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

und der Relativkoordinate

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

und weiters der Gesamtmasse

$$M = m_1 + m_2$$

und der *reduzierten Masse*

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

kann man 2.1 schreiben als

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \dot{\vec{R}}) = \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|). \quad (2.2)$$

Da die Lagrangefunktion keine Kopplungsterme von \vec{R} und \vec{r} enthält, sind auch die Bewegungsgleichungen für den Schwerpunkt $\vec{R}(t)$ und der Relativbewegung des Körpers im Zentralpotential $\vec{r}(t)$ entkoppelt. Dadurch muss in weiterer Folge nur noch die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \dot{\vec{R}}) = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|) \quad (2.3)$$

betrachtet werden. Aufgrund

$$\mu \approx m_1 \quad \text{wenn} \quad m_1 \ll m_2 \quad (2.4)$$

beschreibt 2.3 näherungsweise die Bewegung von m_1 . Durch die Einführung von Zylinderkoordinaten $\vec{r} := \vec{r}(\rho, \varphi, z)$ ergibt sich aus 2.3

$$\mathcal{L}(\rho, z, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}) = \frac{\mu}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(\sqrt{\rho^2 + z^2}) \quad (2.5)$$

Die Lagrangegleichungen lauten damit:

$$\mu \ddot{\rho} = \mu \rho \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial \rho} \quad (2.6)$$

$$\frac{d}{dt}(\mu \rho^2 \dot{\varphi}) = 0 \quad (2.7)$$

$$\mu \ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad (2.8)$$

Im nächsten Schritt erfolgt die Reduktion zur Radialgleichung. Aufgrund der Drehimpulserhaltung $\dot{\vec{l}} = 0$ (mit $\vec{l} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$) kann das Koordinatensystem so gewählt werden, dass der Drehimpulsvektor mit der z-Achse übereinstimmt: $\vec{l} = l \vec{e}_z$. Daraus folgt, dass die gesamte Bahnkurve in der x-y-Ebene liegt, also $z(t) = 0$. Aus Gleichung 2.7 folgt:

$$\mu\rho^2\dot{\varphi} = l = \text{const} \Rightarrow \dot{\varphi} = l/(\mu\rho^2), \quad (2.9)$$

wodurch man 2.8 schreiben kann als

$$\mu\ddot{\rho} = \frac{l^2}{\mu\rho^3} - \frac{dU(\rho)}{d\rho} \quad (2.10)$$

Mittels

Theorem 1 (Energieerhaltung)

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} \Rightarrow \sum_{k=1}^f \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_k} \dot{q}_k - \mathcal{L} = \text{const}$$

folgt

$$E = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\rho}}\dot{\rho} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\dot{\varphi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}}\dot{z} - \mathcal{L} = \frac{\mu}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + U(\sqrt{\rho^2 + z^2}) = \text{const}. \quad (2.11)$$

Mittels $z = 0$ und $\dot{\varphi} = l/(\mu\rho^2)$ erhält man

$$E = \frac{\mu}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{l^2}{2\mu\rho^2} + U(\rho). \quad (2.12)$$

Aus dieser Differentialgleichung erster Ordnung kann man die Lösung für die Bahnkurve angeben. Aus

$$\dot{\rho} = \left(\underbrace{\frac{2}{\mu}(E - U(\rho) - \frac{l^2}{2\mu\rho^2})}_{\chi} \right)^{1/2} \quad (2.13)$$

folgt durch Integration t_0 bis t

$$t = t_0 + \int_{\rho_0}^{\rho} d\rho' \sqrt{\chi^{-1}}, \quad (2.14)$$

wobei alle ρ in χ sinngemäß mit ρ' zu ersetzen sind. Die Lösbarkeit des Integrals hängt vom gewählten Potential $U(t)$ ab. Weiters erhält man $\rho = \rho(t)$ aus $t = t(\rho)$ in. Setzt man dieses $\rho(t)$ in 2.9 ein, erhält man durch eine weitere Integration den Bahnwinkel $\varphi(t)$.

Alternativ kann auch die Bahnkurve $\varphi = \varphi(\rho)$ bestimmt werden. Aus 2.9 und 2.13 erhält man

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \dot{\varphi}/\sqrt{\chi} \quad (2.15)$$

woraus folgt

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{\rho_0}^{\rho} d\rho' \frac{l/(\mu\rho'^2)}{\chi} \quad (2.16)$$

Bei der allgemeinen Lösung des Zweikörperproblems treten 12 Integrationskonstanten auf. Davon beschreiben sechs die Schwerpunktbeziehung des Systems, die weiteren beschreiben die Bahn des Planeten. Anstatt diese sechs Konstanten als Bahnelemente zu benutzen, kann man auch beliebige Systeme von Funktionen dieser Konstanten als Bahnelemente heranziehen. Voraussetzung hierbei ist, dass die gegenseitige Zuordnung umkehrbar eindeutig ist.

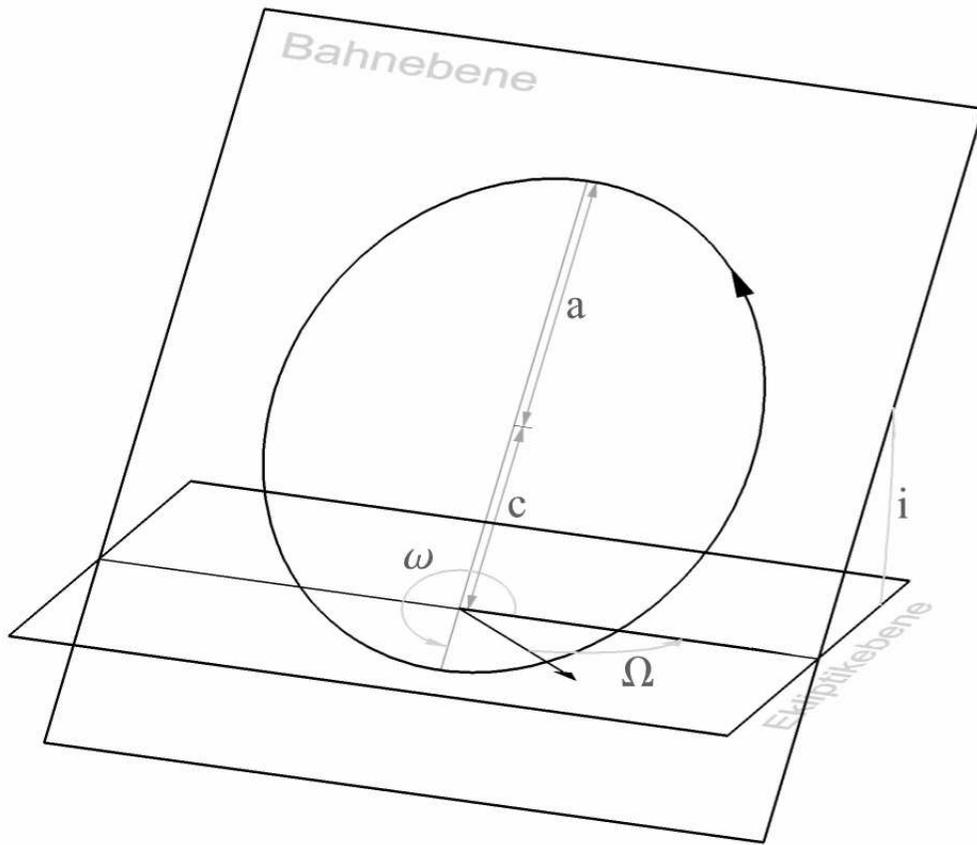


Abbildung 2.1: Bahnelemente (Sonnensystem)

2.1.1 Bahnelemente

Die folgende Tabelle enthält die in der Astronomie üblichen Bezeichnungen der Bahnelemente

Abkürzung	Beschreibung
a	grosse Halbachse
b	kleine Halbachse
c	Abstand Mittelpunkt-Brennpunkt
e	Exzentrizität
i	Inklination; Neigung der Bahnebene zur Referenzebene ($i < 90^\circ$: rechtläufig; $i > 90^\circ$:rückläufig)
Ω	Länge des aufsteigenden Knotens
ω	Lage des Perihels in der Bahn
$\tilde{\omega} = \Omega + \omega$	Länge des Perihels (2 Ebenen!)
T_0	Periheldurchgangszeit

Die Eigenschaften von Planetenbahnen im Keplerproblem werden durch fünf Bahnelemente festgelegt. Die Form der Ellipse wird durch die grosse Halbachse a und die numerische Exzentrizität e festgelegt. Die Bahnebene ist charakterisiert durch die Inklination i , die Knotenlänge Ω und den Perihelwinkel ω (siehe Abb. 2.1). Als Anfangsbedingung für die Position des Planeten fungiert die Perihelzeit t_0 , welche angibt, zu welchem Zeitpunkt sich der Planet in der

sonnennächsten Position² befand.

2.1.2 Bahnelemente extrasolarer Planeten

Die Bahnelemente extrasolarer Planeten stimmen im Wesentlichen mit den auf unser Sonnensystem bezogenen Bahnelementen aus Abschnitt 2.1 überein. Den sternnächsten Punkt der Planetenbahn bezeichnet man im Gegensatz zu Perihel als *Periastron*. Als Referenzebene fungiert klarerweise nicht die durch die Erdbahn aufgespannte Ebene, sondern eine fiktive Tangentialebene an die "Himmelskugel". Die Inklination i bezieht sich auf genau diese Ebene. Bei $i = 0^\circ$ liegt die Planetenbahn genau in dieser Ebene, und es gibt keinen Radialgeschwindigkeitsanteil der durch den Planeten verursachten Bewegung des Sternes. Ist $i \neq 0^\circ$, so ist lediglich eine Projektion der Bahnbewegung (also der Geschwindigkeiten, nicht der Bahn selbst!) auf eine Normalebene zur Tangentialebene beobachtbar. Somit kann als Massenangabe immer nur ein Minimalwert $m \cdot \sin i$ angegeben werden, da höhere Planetenmassen bei geringeren Inklinationen nicht von geringeren Massen bei grösseren Inklinationen zu unterscheiden sind (siehe Gleichung 2.42). Auch die Lage dieser Normalebene ist nicht bestimmbar, da unabhängig von der tatsächlichen Lage immer die selben Radialgeschwindigkeitsvariationen resultieren. Somit ist auch der Winkel Ω bei extrasolaren Planeten aus RV-Daten nicht bestimmbar. Es ist jedoch sehr wohl möglich ω zu bestimmen. Je nach Lage des Periastrons ergeben sich für bestimmte e unterschiedliche Formen der Schwingungskurve. Als Anfangsbedingung fungiert wieder der Zeitpunkt T_0 , der die Zeit bis zum ersten Periastrondurchgang des Planeten nach einem bestimmten Referenzzeitpunkt angibt.

Während die Inklination i mit der RV-Methode prinzipiell nicht bestimmbar ist, können astrometrische Daten (z.B. von *Hipparcos*) obere und untere Schranken liefern. Die genaue Bestimmung von i ist nur mittels der Transitmethode möglich.

2.2 Das Keplerproblem

Am Beginn dieses Abschnittes werden die Keplerschen Gesetze angegeben, nach einer darauffolgenden kurzen Zusammenfassung über Ellipsen wird dann eine Herleitung der Kepler-Gleichung zur Positionsbestimmung aus den Bahnelementen angegeben.

2.2.1 Die Keplerschen Gesetze

- **1. Keplersches Gesetz**

Planetenbahnen sind Ellipsen in derer einem Brennpunkt die Sonne steht.

- **2. Keplersches Gesetz**

Der Radiusvektor Sonne-Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (Abb.2.4). Unterteilt man die Bahnellipse in N Ellipsensegmente gleicher Fläche, so benötigt der Radiusvektor $\Delta t = \frac{U}{N}$ Zeit zum überstreichen der Fläche. U bezeichnet dabei die Gesamtumlaufzeit. Mit den polaren Koordinaten r und v (Abb.2.4) gilt für ein Ellipsensegment näherungsweise

$$\frac{1}{2}r(r + \Delta r) \sin \Delta v \approx \frac{1}{2}r^2 \Delta v. \quad (2.17)$$

r , $(r + \Delta r)$ und Δv sind die Kanten des Dreieckes. Aus $r^2 \Delta v = c \Delta t$ folgt

$$r^2 \frac{dv}{dt} = c, \quad (2.18)$$

²Die sonnennächste Position eines Planeten bezeichnet man als Perihel, die sonnenfernste als Aphel. Bei Planeten anderer Sterne spricht man von Periastron bzw. Apastron

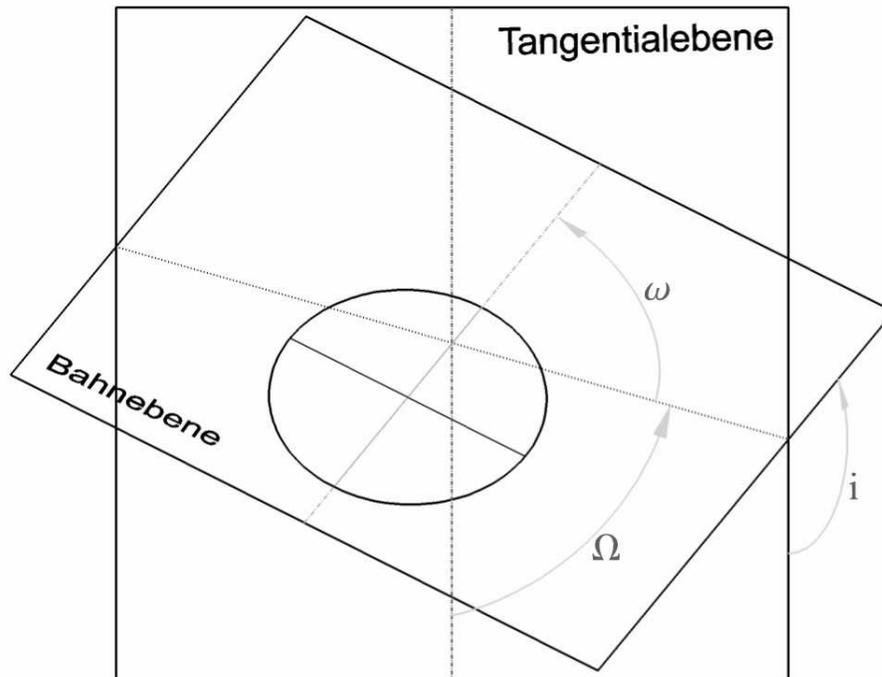


Abbildung 2.2: Bahnelemente Extrasolarer Planeten

wobei c eine Konstante ist. Für den Flächeninhalt eines Sektors gilt

$$\frac{\pi ab}{N} = \frac{1}{2}c\Delta t = \frac{1}{2}c\frac{U}{N},$$

woraus folgt

$$c = \frac{2\pi}{U}ab. \quad (2.19)$$

- **3. Keplersches Gesetz**

Die Kuben der Halbachsen verhalten sich wie die Quadrate der Umlaufzeiten.

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{U_1^2}{U_2^2}$$

bzw.

$$\frac{a^3}{U^2} = \text{const},$$

wobei die Konstante nur von den Massen der Körper abhängt.

2.2.2 Bahnellipsen

Eine Ellipse ist eine Kurve, die sich aus der Menge aller Punkte ergibt, die von zwei Brennpunkten F_1 und F_2 ausgehend, eine konstante Summe der Abstände haben. Die entsprechende Bedingung lautet

$$2a = r_1 + r_2,$$

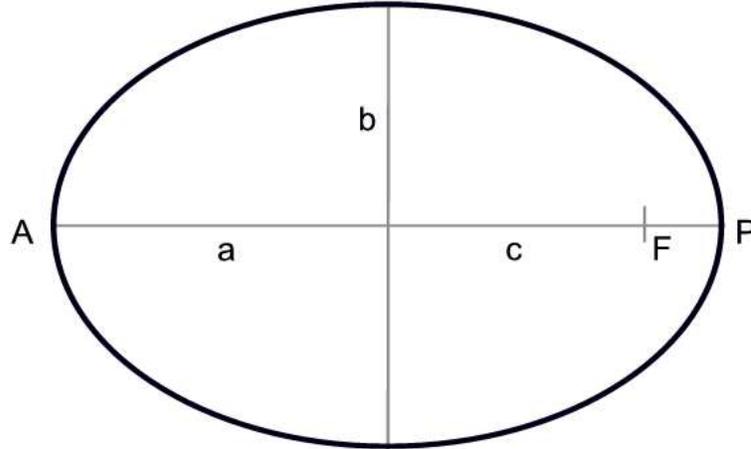


Abbildung 2.3: Bahnellipse

wobei a die große Halbachse bezeichnet (Abb. 2.3). c bezeichnet den Abstand vom Ellipsenmittelpunkt zum Brennpunkt, b die kleine Halbachse, und es gilt

$$c^2 = a^2 - b^2. \quad (2.20)$$

Die Ellipsengleichung in kartesischen Koordinaten lautet:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.21)$$

Die dimensionslose Größe für die Form der Ellipse nennt man

Definition 1 (numerische Exzentrizität)

$$e := \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (2.22)$$

Die radiale Koordinate des Planeten wird üblicherweise mit r bezeichnet, den Positionswinkel bezeichnet man als *wahre Anomalie* v . Die beiden Koordinaten sind gekoppelt durch die Ellipsengleichung 2.21. Schreibt man diese in polaren Koordinaten³

$$\begin{aligned} x &= c + r \cos v \\ y &= r \sin v \end{aligned}$$

erhält man

$$b^2(c^2 + 2rc \cos v + r^2 \cos^2 v) + a^2 r^2 \sin^2 v = a^2 b^2 \quad (2.23)$$

Durch die Verwendung der Beziehung $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ ergibt sich daraus

$$b^2 c^2 + 2rc b^2 \cos v + b^2 r^2 \cos^2 v + a^2 r^2 - a^2 r^2 \cos^2 v = a^2 b^2.$$

³der Koordinatenursprung ist hierbei in einem Brennpunkt der Ellipse, und nicht, wie auch manchmal verwendet, im Ellipsenmittelpunkt.

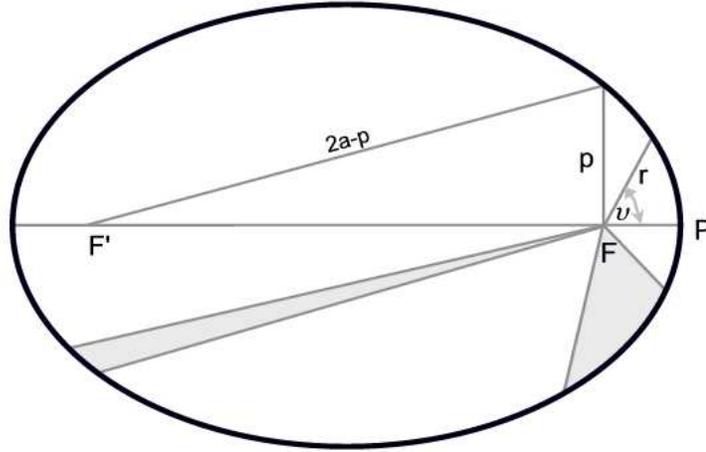


Abbildung 2.4: Illustration des dritten Keplerschen Gesetzes, dem Flächensatz

Verwendet man die (direkt aus 2.20 und 2.22 folgenden) Beziehungen $c = a \cdot e$ und $b^2 = a^2(1 - e^2)$, so kann man weiter umformen zu

$$a^2(1 - e^2)a^2e^2 + 2aea^2(1 - e^2)r \cos v + a^2(1 - e^2)r^2 \cos^2 v + a^2r^2 - a^2r^2 \cos^2 v = a^4(1 - e^2)$$

Division durch $-a^2$ und Vereinfachung des Ausdruckes liefert

$$-r^2 + [er \cos v - a(1 - e^2)]^2 = 0.$$

Dadurch ist

$$r = \pm [er \cos v - a(1 - e^2)].$$

Da im Falle von $e = 0$ nur positive Werte von a sinnvoll sind, muss das negative Vorzeichen gewählt werden, wodurch man die *Polarform* der Ellipsengleichung erhält:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v} \quad (2.24)$$

Dabei nennt man p den *halben Parameter*. Mittels Gleichung 2.24 ist eine Beziehung zwischen den beiden Bahnkoordinaten hergestellt, und somit mittels den Konstanten a und e die Form der Bahn eindeutig festgelegt. Das zweite Keplerschen Gesetz sagt, dass

$$\frac{S}{F} = \frac{t}{U}, \quad (2.25)$$

wobei t die verstrichene Zeit, $F = \pi ab$ die Gesamtfläche der Ellipse und U die Umlaufzeit des Planeten ist. Gemäß dem dritten Keplerschen Gesetz gilt

$$U^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\mu} \quad (2.26)$$

mit $\mu = G \cdot (M + m)$, womit S bekannt ist. Das Problem ist nun, die wahre Anomalie v aus S zu bestimmen.

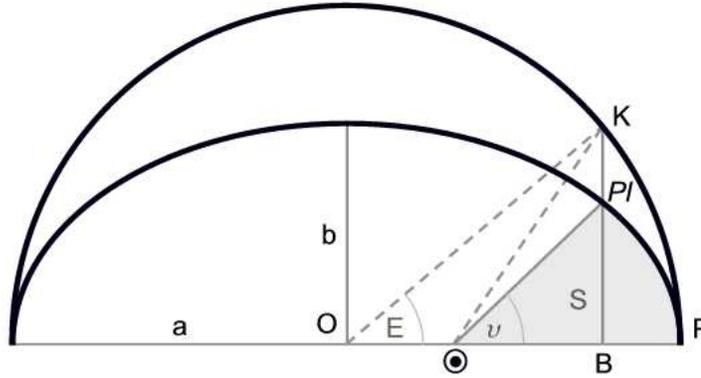


Abbildung 2.5: Exzentrischer Kreis zur Konstruktion der Kepler-Gleichung

2.2.3 Positionsbestimmung

Das Problem der Berechnung des Ortes eines Planeten zu einem bestimmten Zeitpunkt aufgrund der Bahnelemente bezeichnet man als *Keplerproblem*. Man konstruiert nun einen konzentrischen Kreis mit Radius a (siehe Abbildung 2.5).

Definition 2 (Exzentrische Anomalie) Die *Exzentrische Anomalie*

$$E = \angle POK$$

ist der Winkel des fiktiven Planeten K auf dem Kreis, vom Zentrum aus betrachtet.

Theorem 2 In jedem Punkt verhalten sich die elliptischen Ordinaten zu den Kreisordinaten wie $\frac{b}{a}$.

Beweis. In kartesischen Koordinaten gilt für die Punkte eines Kreises $x^2 + y^2 = a^2$, wobei a den Radius des Kreises bezeichnet. Somit gilt $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Aus der Ellipsengleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ folgt, dass $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. \square

Pl bezeichne den Ort des Planeten, und die Ordinate in Pl schneidet den Kreis in K (vergl. Abb. 2.5) in B . Für die Fläche des Sektors S (aus Abb. 2.5) gilt gemäß Theorem 2

$$S = S(P, \odot, Pl) = \frac{b}{a} \cdot S(P, \odot, K) \quad (2.27)$$

Aus der Formel für den Flächeninhalt der Ellipse $F_{\text{Ellipse}} = \pi ab$ folgt für Keplerbahnen aufgrund des zweiten Keplerschen Gesetztes, dass

$$S_{(P, \odot, Pl)} = \frac{t}{P} \pi ab. \quad (2.28)$$

Mit der Formel für die Fläche eines Kreissektors

$$F_{\text{Kreissektor}} = \frac{\pi r^2 \varphi}{2\pi} \quad (2.29)$$

gilt mit $c = a \cdot e$ und $h_{\Delta(\odot, O, K)} = a \sin E$ weiters:

$$S(P, \odot, K) = S(P, O, K) - \Delta(\odot, O, K) = \frac{E}{2\pi} \pi a^2 - \frac{1}{2} a^2 e \sin E = \frac{1}{2} a^2 (E - e \sin E) \quad (2.30)$$

Mittels 2.27 und 2.30 ergibt sich somit

$$S = \frac{1}{2} ab (E - e \sin E). \quad (2.31)$$

Definition 3 (Mittlere Anomalie)

$$M = \frac{2\pi t}{U} \quad (2.32)$$

Gleichsetzen von 2.28 und 2.31 ergibt unter Verwendung der Mittleren Anomalie aus Definition 2.32 die *Kepler-Gleichung*

$$E - e \sin E = M. \quad (2.33)$$

Die Kepler-Gleichung ist eine transzendente Gleichung, auf deren Lösung im Anhang B.1 genauer eingegangen wird. Abbildung 2.5 ist zu entnehmen, dass $OB = \overline{O\odot} + \overline{\odot B}$ und somit

$$a \cos E = ae + r \cos v. \quad (2.34)$$

Setzt man nun 2.24 in 2.34 ein, und dividiert anschließend durch a , erhält man

$$\cos E = e + \frac{(1 - e^2) \cos v}{1 + e \cos v} = \frac{e + \cos v}{1 + e \cos v},$$

$$1 - \cos E = \frac{(1 - e)(1 - \cos v)}{1 + e \cos v},$$

$$1 + \cos E = \frac{(1 + e)(1 + \cos v)}{1 + e \cos v}.$$

Benutzt man die mathematische Identität

$$\tan \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}},$$

erhält man

$$\tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan \frac{E}{2}. \quad (2.35)$$

Setzt man die Terme $\cos v$ in 2.24 und 2.34 gleich, erhält man schließlich einen Ausdruck für r

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (2.36)$$

Man erhält also aus der Keplergleichung 2.33 die Exzentrische Anomalie (Def. 2), womit dann mittels der Gleichungen 2.35 und 2.36 die Position des Planeten bestimmt werden kann.

2.3 Ableitung der Radialgeschwindigkeit des Sternes

Das bisher betrachtete Modell geht von der Bewegung eines Planeten in einem Zentralpotential aus. Dieses Modell stimmt unter bestimmten Voraussetzungen (dazu mehr in Abschnitt 2.4) sehr gut mit der tatsächlichen Bewegung des Planeten überein, die Bewegung des Sternes selbst, wird jedoch nicht beschrieben. Deshalb berechnet man im Folgenden die Radialgeschwindigkeit des Planeten, und bestimmt dann aus dieser mittels des Impulssatzes die Radialgeschwindigkeit des Sternes.

Für die z -Komponente der Planetenposition kann man den folgenden Ausdruck anschreiben:

$$z = r \sin(v + \omega) \sin i \quad (2.37)$$

Daraus folgt die Radialgeschwindigkeit des Planeten

$$\frac{dz}{dt} = [\cos(v + \omega)r\dot{v} + \sin(v + \omega)\dot{r}] \sin i. \quad (2.38)$$

\dot{r} erhält man durch Ableitung der Ellipsengleichung 2.24:

$$\dot{r} = \frac{p^2}{(1 + e \cos v)^2} \frac{e}{p} \sin v \dot{v} \quad (2.39)$$

Mittels 2.18, 2.19, 2.24 und 2.39 kann man 2.38 schreiben als

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{c \sin i}{p} [\cos(v + \omega)(1 + e \cos v) + \sin(v + \omega)e \sin v] \\ &= \frac{c \sin i}{p} [\cos(v + \omega) + (\cos(v + \omega)e \cos v) + \sin(v + \omega)e \sin v] \\ &= \frac{c \sin i}{p} [\cos(v + \omega) + e \cos v (\cos v \cos \omega - \sin v \sin \omega) + e \sin v (\sin v \cos \omega + \cos v \sin \omega)] \\ &= \frac{c \sin i}{p} [\cos(v + \omega) + e \cos^2 v \cos \omega - e \sin v \sin \omega \cos v \\ &\quad + e \sin^2 v \cos \omega + e \sin v \cos v \sin \omega] \\ &= \frac{c \sin i}{p} [\cos(v + \omega) + e \cos \omega (\sin^2 v + \cos^2 v)]. \end{aligned}$$

Der Ausdruck für die Radialgeschwindigkeit lautet also

$$v = \frac{dz}{dt} = K [\cos(v + \omega) + e \cos \omega] \quad (2.40)$$

mit

$$K = \frac{2\pi}{U} \frac{a \sin i}{\sqrt{1 - e^2}}. \quad (2.41)$$

Mittels

Theorem 3 (Impulssatz)

$$\sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = \text{const}$$

kann man hiermit auf die Radialgeschwindigkeit des Sternes rückrechnen:

$$v_z^* = -\frac{m \frac{dz}{dt}}{M} = -\frac{1}{M} \cdot m \sin i \cdot \frac{2\pi}{U} \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} [\cos(v + \omega) + e \cos \omega] \quad (2.42)$$

Als einfachstes Modell für Mehrplanetensysteme kann die Radialgeschwindigkeit des Sternes v_z^* dadurch berechnet werden, indem die rechte Seite in 2.42 für alle Planeten einzeln aufsummiert wird. Hierbei wird jedoch nicht berücksichtigt, dass in Mehrplanetensystemen auch bei Vernachlässigung direkter Wechselwirkungen zwischen den Planeten eine indirekte Wechselwirkung über den Zentralstern vorliegt und somit keine reinen Kepler-Orbits angenommen werden können. In [GKM03] wird deshalb die Verwendung von *Jacobi-Koordinaten* empfohlen. Eine bessere Approximation für v_z^* lautet demnach

$$v_z^* = \sum_i \sigma_i v_i \quad (2.43)$$

mit

$$\sigma_i = \frac{m_i}{M + \sum_{j=0}^i m_j} \quad (2.44)$$

wobei der Index i in 2.43 alle Planeten durchläuft. Zur Berechnung der Umlaufzeit U_i muss μ in Gleichung 2.26 durch $\mu_i = G \cdot (M + \sum_{j \leq i} m_j)$ ersetzt werden.

2.4 Reale Planetenbahnen

Für das *N-Körper Problem* existiert im Gegensatz zum 2-Körperproblem keine allgemeine analytische Lösung. Geschlossene Lösungen existieren lediglich für einige Spezialfälle, wie zum Beispiel dem *Eingeschränkten 3-Körper Problem*, das koplanare Orbits mit zwei primären Massen auf Kreisbahnen beschreibt. Für den allgemeinen Fall muss auf numerische Methoden zurückgegriffen werden. Die prinzipielle Vorgehensweise dabei ist, Näherungslösungen für die n Bewegungsgleichungen zu finden. Dafür müssen Positionen \vec{r}_i und Geschwindigkeiten \vec{v}_i der Teilchen zu einem bestimmten Zeitpunkt bekannt sein, was die Berechnung der Kräfte ermöglicht. Die Orte und Geschwindigkeiten nach einem bestimmten Zeitintervall Δt erhält man dann durch die Approximation der Beschleunigung durch Differenzenquotienten.

Planetensysteme mit mehr als einem Planeten fallen auch in den Bereich des N-Körper Problems. Insbesondere die Bahnen massearmer Planeten werden stark durch die massereicheren Planeten beeinflusst. Beispielsweise bewirkt Jupiter zum Zeitpunkt der Opposition eine geringe Störung der Erdbahn, da er auf die Erde eine Kraft ausübt, die einem 1/53000 der Kraft der Sonne auf die Erde entspricht [Voi91]. Derartige Störungen bewirken im Wesentlichen eine Drehung des Perihels der Planetenbahn.

Bei besonders massereichen Planeten gilt die Näherung 2.4 nicht mehr besonders gut, wobei in diesem Fall m_1 für die Planetenmasse und m_2 für die Sonnenmasse steht. Für Jupiter ($m_J \approx 10^{-3} M_\odot$) “[...]erwarten wir daher Promillekorrekturen gegenüber unserem Modellsystem.” [Fli03].

Auch relativistische Effekte bedingen Abweichungen der realen Planetenbahnen von den Kepler-Orbits. Behandelt man das Gravitationsfeld relativistisch, so bedeutet das eine Abweichung vom $1/r$ -Potential. Geschlossene Bahnen existieren jedoch nur bei einem $1/r$ -Potential. Beispielsweise sind knapp 8% der Periheldrehung der Merkurbahn durch relativistische Effekte bedingt. Des weiteren bedeutet das durch die Rotation und die damit verbundene Abplattung entstehende Quadrupolmoment der Sonne eine Abweichung vom $1/r$ -Potential.

Die erwähnten Abweichungen fallen jedoch im Allgemeinen sehr gering aus. Unmittelbare Konsequenzen ergeben sich nur für Langzeitsimulationen im Bereich von mehr als einigen hundert Jahren. Da bei der Beobachtung von Exoplaneten auch in absehbarer Zeit keine Datensamples über dermaßen grosse Zeitintervalle vorhanden sein werden, sind die Kepler-Orbits in den meisten Fällen der Planetensuche ein ausreichend genauer Ansatz zur Berechnung der

Planetenbahnen. Klarerweise gilt das nur für Planetensysteme mit einem Zentralstern, und keinen weiteren stellaren Begleitern. In bestimmten Fällen kann jedoch davon ausgegangen werden, dass die Kepler-Orbits auch bei Verletzung dieser Bedingung ein akzeptables Näherungsmodell darstellen. Das gilt z.B. für weit entfernte massearme Begleitsterne. Für Planeten, die enge Doppelsterne auf engen Orbits umkreisen ist diese Reduktionsmethode ungeeignet.

2.5 Radialgeschwindigkeitsmessungen

Radialgeschwindigkeitsdaten stellen in den meisten Fällen die einzige Datenquelle für die Suche nach Exoplaneten dar. Da sie der Input für den evolutionären Algorithmus sind, wird in diesem Abschnitt etwas genauer auf ihre Gewinnung eingegangen. Nach einer allgemeinen Beschreibung der Spektren, werden neben beobachtungstechnischen Aspekten verschiedene Ursachen für Messfehler angegeben.

2.5.1 Sternspektren

Unter einem Spektrum versteht man die Zerlegung des Lichtes in dessen einzelne Wellenlängenanteile. Üblicherweise werden Sternspektren mit an Teleskopen montierten Prismen oder Gittern gewonnen. Spektren stellen die einzig direkte Informationsquelle über die physikalischen Eigenschaften von Sternen dar. Je nach Masse und Leuchtkraftklasse des Sterns weisen die Spektren typische Intensitätsverläufe und Linienmuster auf. Die Linienmuster sind bei den meisten Sternen Absorptionslinien, die dadurch zustande kommen, dass Atome und Moleküle in der Sternatmosphäre Photonen bestimmter Energien absorbieren ($\Delta E = h\nu$), und diese dann nach kurzer Zeit wieder in eine beliebige Richtung abgeben. Diese Atome bzw. Moleküle absorbieren also das Licht in bestimmten Wellenlängenbereichen teilweise oder gänzlich. Die Oberflächentemperatur eines Sternes bestimmt im Wesentlichen den Ionisationsgrad verschiedener Atome und Moleküle, und dadurch das Linienmuster.

2.5.2 Spektrographen

Geräte zur Zerlegung des Lichtes nach Wellenlängen bezeichnet man als *Spektrographen*. Die dispergierenden Elemente⁴ eines Spektrographen sind *Prismen*, *Gitter* oder *Grisms*⁵. Die wichtigsten Komponenten eines modernen Spektrographen sind: Spalt, Kollimator, Gitter und Kamera. Der Spalt befindet sich in der Fokalebene des Teleskopes. Die, den Spalt verlassenden, divergenten Strahlen werden durch einen Kollimator ins Unendliche abgebildet. Das dispergierende Element erzeugt aus diesen parallelen Strahlen ein Spektrum, welches entweder durch eine Linse oder einen Spiegel auf die Kamera abgebildet wird. Als Detektor kommt üblicherweise eine *CCD-Kamera*⁶ zum Einsatz. Man benutzt heute nahezu ausschließlich Gitterspektrographen, da moderne, holographisch hergestellte Gitter bestimmte spektrale Ordnungen bezüglich der Helligkeit stark bevorzugen (Blaze-Gitter). In der hochauflösenden Spektroskopie werden sogenannte *Echelle-Spektrographen* verwendet. Das Echelle-Gitter erzeugt ein hochaufgelöstes Spektrum mit überlappenden Ordnungen, welche durch ein zweites Gitter in grober Spektralaufösung auseinandergezogen werden, wodurch eine zweidimensionale Anordnung der einzelnen Teilspektren

⁴Dispersion bedeutet im Bereich der Optik die Abhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Lichtwellen von ihrer Frequenz. Diese Eigenschaft führt in einem Prisma zur Auffächerung des Lichtes. Optische Elemente mit dieser Eigenschaft werden als dispergierende Elemente bezeichnet.

⁵Grism: Setzt sich aus den englischen Wörtern *grating*(Gitter) und *prism*(Prisma) zusammen. Ein Grism ist ein Prisma, an dessen Rückseite zusätzlich ein Spektralgitter aufgebracht ist.

⁶CCD: Charge-coupled Device; dieser lichtempfindliche Halbleiterdetektor hat die photographischen Platten in der Astronomie nahezu gänzlich abgelöst.

resultiert. Die spektrale Auflösung $A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = nN$ eines Gitters hängt in der Ordnung n von der Gesamtanzahl N der Linien ab.

2.5.3 Gewinnung der Radialgeschwindigkeitsdaten

Aufgrund des Doppler-Effekts kommt es, bedingt durch die, durch Planeten hervorgerufene, periodische Bewegung des Sternes zu periodischen Verschiebungen des Spektrums. Um möglichst genaue Messwerte zu erzielen, wird die Position mehrerer Spektrallinien mit einem von einer Vergleichslichtquelle erzeugtem Referenzspektrum verglichen. Aufgrund der Wellenlängenverschiebung $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ kann man die relative Geschwindigkeit v des beobachteten Objektes mittels der Beziehung

$$\frac{v}{c} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \quad (v \ll c) \quad (2.45)$$

bestimmen. Dabei bezeichnet c die Lichtgeschwindigkeit, λ die gemessene Wellenlänge, und λ_0 die Referenzwellenlänge. Eine, durch Entfernung der Quelle hervorgerufene, Vergrößerung der Wellenlänge (Rotverschiebung), ist per Definition eine positive Radialgeschwindigkeit. Bezüglich nahezu aller astronomischer Anwendungen ist die, auf das Baryzentrum des Sonnensystems bezogene, Radialgeschwindigkeit von Interesse. Die enthaltenen Anteile der Erdrotation und der Bahnbewegung müssen also in der ersten Datenreduktion aus dem Signal herausgefiltert werden. Die verbleibenden Anteile im Signal sind die Relativbewegung des Sonnensystems zu dem beobachteten Objekt, und vom Objekt selbst, bzw. durch messtechnisch bedingte statistische Effekte verursachten Radialgeschwindigkeitsvariationen.

Die Größenordnung der durch Jupiter verursachten Radialgeschwindigkeitsvariation der Sonne liegt im Bereich von ca. 13m/s, die Erde bewirkt lediglich Geschwindigkeiten im Bereich von ca. 1m/s. Mit modernen Großteleskopen können mittlerweile Genauigkeiten erzielt werden, die im Bereich von einigen m/s liegen. *“For Proxima Cen (M5V), one of the prime targets of our M-stars planet search program using the UVES spectrograph & iodine cell at the ESO VLT UT2, we obtain a long term RV precision of 2.5ms^{-1} . Based on numerical simulations we determine that this level of precision would have already allowed us to detect planets $m \sin i = 4$ to $6M_{\oplus}$ inside the habitable zone of Proxima Cen.”* [End02]. Die Entdeckung eines erdähnlichen Planeten in der *habitable Zone*⁷ ist wahrscheinlich zur Zeit das größte Ziel der Planetensuche.

2.5.4 Messfehler

Systematische Messfehler, werden durch die Beobachtungstechnik weitestgehend vermieden. Sie stellen auch keine grundsätzliche Einschränkung für die Planetensuche dar, da nur die RV-Variationen von Interesse sind, und nicht die absolute Raumbewegung des Systems.

Um eine hohe spektrale Auflösung erzielen zu können, muss die Spaltbreite möglichst gering sein, da einzelne Spektrallinien ja nichts anderes als die Abbildung des Spaltes sind. Gemäß dem Nyquist-Kriterium sollte optimalerweise ein Spaltelement auf zwei Pixel der CCD-Kamera abgebildet werden. Unterschiedliche Beobachtungsbedingungen in verschiedenen Nächten (zB. Streulicht vom Mond, Seeing⁸) erfordern jeweils eine Adaptierung der Spaltbreite bei der Beobachtung desselben Objektes, was eine Ursache für die oftmals sehr unterschiedlichen Fehler einzelner Messungen ist.

Dem Auflösungsverlust bei grossen Spaltbreiten steht der Lichtverlust bei geringen Spaltbreiten gegenüber. Die für die Planetensuche erforderliche hohe Genauigkeit erfordert entsprechend

⁷“Als *habitable Zone* (auch Lebenszone oder Ökosphäre) bezeichnet man i.A. den Abstandsbereich, in dem sich ein Planet von seinem Zentralgestirn aufhalten muss, damit Wasser dauerhaft in flüssiger Form – und damit die Voraussetzungen für Leben wie wir es kennen – auf der Oberfläche existieren kann.” (Quelle: Wikipedia)

⁸Als Seeing bezeichnet man den Effekt der scheinbaren, geringfügigen Bewegung von Sternen, hervorgerufen durch Lichtablenkung aufgrund von Turbulenzen in der Erdatmosphäre.

geringe Spaltbreiten, was wiederum erklärt, warum für die Planetensuche mittels RV-Methode sehr grosse Teleskope benötigt werden. Weniger lichtstarke Optiken würden hierbei zu einem zu schlechten Signal-zu-Rausch-Verhältnis (Signal-to-Noise Ratio, SNR) führen.

Auch instrumentell bedingte Effekte, wie thermisches Rauschen oder Dunkelstrom, tragen zu den Messfehlern bei. Auch das Photonenrauschen führt zu weiteren Messunsicherheiten. Dabei gilt, dass die Wahrscheinlichkeit der Detektion einer bestimmten Anzahl von Photonen in einem bestimmten Zeitintervall poissonverteilt ist.

Trotz all dieser Fehlerquellen ist die *“[...] erwartete maximale Messgenauigkeit von ca. 1m/s [...] heute fast schon erreicht. Genauer wird die Radialgeschwindigkeit nicht messbar sein, da z.B. Sonnenflecken einen Effekt dieser Größenordnung erzeugen können. Geht der Fleck für den Beobachter auf der Sonnenscheibe auf, so verdunkelt er Teile der auf den Beobachter zulaufenden Sonnenatmosphäre. Die Folge ist eine geringfügige Rotverschiebung des Spektrums, da sich nun mehr leuchtende Sonnenatmosphäre vom Beobachter entfernt, als auf ihn zukommt.”* [exo]

Kapitel 3

Physikalische Aspekte

Ich nehme an: dass alle Materien, daraus die Kugeln,
die zu unserer Sonnenwelt gehören,
alle Planeten und Kometen, bestehen, im Anfange aller Dinge,
in ihren elementarischen Grundstoff aufgelöst,
den ganzen Raum des Weltgebüdes erfüllt haben,
darin jetzt diese gebildete Körper herumlaufen.
Immanuel Kant

Dieses Kapitel behandelt einige physikalische Eigenschaften von Planetensystemen. Einige theoretische Ansätze bezüglich Entstehung und Stabilität werden kurz dargestellt. Die Motivation dieses Kapitels ist, neben der bisher rein mechanischen Betrachtungsweise der Planetensysteme aus Kapitel 2 auch einige astrophysikalische Aspekte darzustellen. Ebenso werden einige bezüglich des in Kapitel 5 vorgestellten evolutionären Algorithmus relevanten Aspekte erläutert.

3.1 RV-Beobachtungsprogramme

Da typische hochauflösende Spektrographen RV-Genauigkeiten im Bereich von 2000m/s aufweisen, war damit die Entdeckung von Planeten lange Zeit unmöglich. Erst gegen Ende des 20. Jahrhunderts wurden Techniken entwickelt, die Genauigkeiten im Bereich von 10m/s und darunter ermöglichten. Ein Ansatz ist die Verwendung einer, direkt dem Spektrographen vorangeschalteten, Jodzelle als Vergleichsquelle ([MB92], [KHC⁺94], [KHC⁺94], [NJK⁺97]). Andererseits wurde die Kalibrationslichtquelle (Thorium) über Glasfaserkabel in den Spektrographen geleitet ([BNN⁺94], [MQ95]). Walker et al. benutzten Fluorwasserstoff zur Wellenlängenkalibration ([WWI⁺95]), McMillan et al. ([MSP⁺90], [MMPS94]) verwendeten ein Fabry-Perot Interferometer um genaue RV-Messungen zu erzielen.

“Leading Surveys were carried out by McMillan et al. [MMPS93], Cochran et al. [MCM00], Mayor and Queloz [MQ95] Noyes et al. [NJK⁺97], and Marcy and Butler [MB98]. Mayor and Queloz [MQ95] have now monitored 140 main-sequence stars for 4 yr, and Cochran and Hatzes [CH94] have monitored 33 stars for 11 yr. Marcy and Butler [MBW⁺97] have monitored 107 F, G, K and M dwarfs for 11 yr, and Noyes et al. [NJK⁺97] have searched ~100 additional solar-type dwarfs and subgiants for ~3 yr.” [MCM00].

Unter den ersten Entdeckungen befanden sich einige der extrem kurzperiodischen Planeten, welche im Widerspruch zu bisherigen Modellen (z.B. [PHB⁺96]) standen. Auch erste statistische Aussagen wurden möglich (Abschnitt 3.2), da diese ersten Beobachtungsprogramme zu einer Stichprobe von ca. 70 (Stand 2002) bekannten Planeten führten. Die dadurch aufgeworfenen Fragen veranlassten weitere Beobachtungsprogramme:

Beispielsweise sollen offene Fragen zur Planetenentstehung (Abschnitt 3.3), insbesondere die Frage nach dem Entstehungsmechanismus der Pegasi-Planeten (Migration, In Situ Entstehung), vor allem durch die Beobachtung junger Sterne geklärt werden (z.B. [HGKM03]). Die Beobachtung Brauner Zwerge soll Aufschluss über den Einfluss der Zentralmasse auf die Planetenentstehung geben ([GW03a], [GW03b]). Aufgrund der bisherigen Stichprobe scheinen metallreiche Sterne übermäßig häufig Planeten zu beherbergen – auch hier sollen weitere Beobachtungen Klarheit schaffen.

Weitere aktuelle Surveys sind beispielsweise *AFOE*, das *Anglo-Australian Planet Search Program*, *California & Carnegie Planet Search*, *Coralie at Leonard Euler Telescope*, *Elodie*, *ESO*

Coude Echelle Spectrometer, Exoplanet Tracker, Survey am Hobby-Eberly Telescope, Survey am Mc Donald Observatory, u.v.m. Eine vollständige Auflistung aller Planetensuchprogramme findet man im Internet bei [Sch].

3.2 Statistische Eigenschaften von Exoplaneten

Aufgrund der mittlerweile 155 bekannten Exoplaneten (Stand Mitte 2005), lassen sich erste statistische Aussagen aus diesem Sample ableiten. Die Herausforderung dabei besteht darin, beobachtungsbedingte Auswahleffekte und Detektionsschranken angemessen zu berücksichtigen. Nach einem kurzen Überblick werden einige aktuelle Erkenntnisse (Stand 2003) zusammengefasst.

Die meisten bisher entdeckten Planeten fallen in eine der beiden folgenden Kategorien:

1. kurzperiodische Systeme mit kreisförmigen Orbits
2. langperiodische Systeme mit exzentrischen Orbits

Planeten der ersten Kategorie werden als “hot Jupiters”, bzw. “Pegasi-Planeten”¹ bezeichnet. Pegasi-Planeten sind vor allem dadurch charakterisiert, dass sie auf sehr sternnahen Orbits ($\lesssim 0.2\text{AE}$) befinden und typischerweise Massen in der Größenordnung einer Jupitermasse besitzen.

Im Allgemeinen sind die Bereiche der wesentlichen Eigenschaften, also Masse und Umlaufperiode, durch beobachtungstechnische Aspekte bestimmt. Ein unteres Limit für die Masse ist gegeben durch die Genauigkeit der RV-Messungen. Da mittlerweile Beobachtungsdaten über einen Zeitraum von mehr als einem Jahrzehnt vorliegen, wären massereiche Planeten auf jupiterähnlichen Orbits prinzipiell erkennbar, allerdings sind Planeten mit kürzeren Umlaufperioden hier klar bevorzugt. Das gilt vor allem auch deshalb, weil Daten im Zeitraum einer Umlaufperiode, insbesondere bei vorhandenen Signalen weiterer Planeten, in der Datenreduktion eventuell noch nicht ausreichend klar hervortreten. Dennoch lassen sich, in Anbetracht dieser Einschränkungen, bereits erste statistische Aussagen und Trends über die Eigenschaften extrasolarer Planeten(systeme) treffen.

Gemäss [PR02] wurden bis dato keine Planeten mit Massen $> 1M_J$ bei kleineren Distanzen als 1 AE beobachtet. Die Ursache hierfür liegt möglicherweise in der starken Gezeitenwechselwirkung zwischen dem Zentralstern und dem Planet. *“If the planet’s orbital periods is smaller than the star’s rotation period, tidal friction will lead to a spin-up of the star and, due to the conservation of momentum, will also lead to a decrease of the semimajor axis of the planet’s orbit”* [PR02]. In [ZM02] wird statistisch nachgewiesen, dass die Korrelation zwischen Masse und Umlaufperiode statistisch signifikant ist. In [UMS03] wird gezeigt, dass $2M_J$ eine Obergrenze für Planeten auf Orbits mit weniger als 100 Tagen Umlaufzeit ($\sim 0.6\text{AE}$) zu sein scheint, und darüberhinaus offenbar verhältnismässig wenige Planeten auf derartig kurzperiodischen Orbits existieren. Als weitere mögliche Ursache wird ein mit dem Verlust der äusseren Gashüllen einhergehender Massenverlust der Planeten in Erwägung gezogen. Neben der Abwesenheit kurzperiodischer massereicher Planeten, gibt es auch einen auffällig geringen Anteil massearmer langperiodischer Planeten, der möglicherweise nicht nur dem Auswahleffekt zuzuschreiben ist.

Ein weiterer interessanter Effekt ist die mögliche Korrelation zwischen dem Metallgehalt² der Sterne mit der Häufigkeit der vorkommenden Planeten, bzw. möglicherweise sogar mit den Umlaufperioden derselben [SIM⁺03]. Hierbei stellt sich die Frage ob der hohe Metallgehalt eher als Ursache oder resultierender Effekt der Planetenentstehung anzusehen ist. Jedoch ist es auch hierbei möglich, dass diese Korrelation lediglich dem Auswahleffekt zuzuschreiben ist [Wuc03].

¹benannt nach der ersten Entdeckung eines Exoplaneten im Sternbild Pegasus, Mayor u. Queloz 1995 ([MQ95])

²Hoher Metallgehalt bedeutet hierbei einen hohen Anteil an Elementen ausgenommen Wasserstoff und Helium.

3.3 Planetenentstehung

Die klassische Theorie der Planetenentstehung geht davon aus, dass die Planeten der protoplanetaren Scheibe aus Staub und Gas entstanden sind.³ Die erste Bestätigung dieser Theorie wurde durch den indirekten Nachweis von Staubscheiben bei *T Tauri* Sternen in den 1980er Jahren erzielt, kurz bevor die erste direkte Beobachtung mit Radioteleskopen erfolgte. Die Winkelgeschwindigkeit Ω der rotierenden Scheibe entspricht annähernd dem Keplerschen Gesetz, also $\Omega = \sqrt{Gm/r^3}$, wobei m der integrierte Masse innerhalb des Radius r entspricht. Ein möglicher Mechanismus zur Planetenentstehung wäre, dass zunächst Gravitationsinstabilitäten zum Kollaps von Gasmassen innerhalb der Scheibe führen – dieser Mechanismus führt tatsächlich zur Entstehung der Sterne innerhalb der Gaswolke. Die Bedingungen für einen Kollaps sind, dass der Radius der Gasmasse kleiner ist als der *Jeansradius* $R_J = \frac{1}{5}GM\frac{\mu m_u}{kT}$, bzw. die Masse grösser als die *Jeansmasse* $M_J = \left(\frac{\pi R}{4\mu G}\right)^{3/2}T^{3/2}\rho^{-1/2}$. Dabei bezeichnet G die Gravitationskonstante, k die Boltzmannkonstante, m_u die Atommasse, T die Temperatur, μ das Molekulargewicht und ρ die Dichte.

Allerdings ist aufgrund der festen Planetenkerne (auch bei den Gasplaneten) davon auszugehen, dass ein vor allem durch die Staubkomponente, welche grössenordnungsmässig 1% der Gesamtmasse der protoplanetaren Scheibe ausmacht, geprägter Bildungsmechanismus dominiert. Durch inelastische Stösse untereinander, ballen sich die Staubpartikel innerhalb der Scheibe zu immer grösseren Brocken, den *Planetesimalen* zusammen. Durch deren Kollisionen entstehen dann in Zeiten der Grössenordnung von 10^8 Jahren die *Protoplaneten*. Hierbei ist jedoch noch unklar, wie der Übergang von den ~ 0.1 m grossen Staubkonglomeraten zu den ~ 1 km grossen Planetesimalen abläuft. Durch Kollisionen entstandene, gravitativ gebundene Ansammlungen von Planetesimalen bilden dann die Protoplaneten. Um nicht durch Gezeitenkräfte auseinander gerissen zu werden, muss der Protoplanet eine so hohe Dichte erreichen, dass sich seine Masse m zur Gänze innerhalb des *Hill-Radius*, r_H befindet.

$$r_H = a \left(\frac{m}{3M} \right)^{1/3} \quad (3.1)$$

Dabei bezeichnet a die grosse Halbachse des Orbits, m die Masse des Planeten/Protoplaneten und M die Masse des Zentralkörpers (Stern). Diese Protoplaneten können dann das verbleibende Gas gravitativ binden, wodurch grössere Gasplaneten entstehen. Der *Asteroidengürtel* zwischen Merkur und Jupiter ist ein verbliebenes Relikt aus der Zeit der Planetenentstehung in den ersten 10^9 Jahren unseres Sonnensystems – aufgrund des gravitativen Einflusses von Jupiter konnte sich an dieser Stelle wahrscheinlich kein grosser Planet bilden. Die genauen Anteile und Abfolgen der beiden Bildungsmechanismen sind noch nicht entgültig verstanden. Weiters ist nicht vollständig geklärt, ob die Theorie der Planetenentstehung in unserem Sonnensystem auch auf andere Systeme angewandt werden kann, bzw. inwieweit sie adaptiert oder gar verworfen werden muss.

3.3.1 Ursprung der Exzentrizitäten

In unserem Sonnensystem haben die Planetenorbits, mit Ausnahme von Merkur und Pluto, annähernd kreisförmige Bahnen ($e < 0.1$, Merkur und Pluto ≈ 0.2). Da bei Exoplaneten auch Orbits mit bis zu $e \approx 0.9$ gefunden wurden (HD 80606 b mit $3.41M_J$ und einer Periode von 111.78 Tagen), ist zu klären welche Mechanismen für die Entstehung derartiger Orbits verantwortlich sind.

Durch Protoplaneten hervorgerufene Dichtewellen in der protoplanetaren Scheibe können geringe Exzentrizitäten erklären, während höhere Exzentrizitäten vor allem durch Modelle mit

³Erste diesbezügliche Überlegungen wurden bereits 1755 von Immanuel Kant formuliert.

gravitativer Wechselwirkung erklärt werden können. Diese kann einerseits zwischen massereichen Planeten untereinander, andererseits auch durch benachbarte Sterne in Doppelsternsystemen, bzw. in Offenen Sternhaufen erfolgen.

3.3.2 Planetare Migration

Unter *planetarer Migration* versteht man die Änderung der grossen Halbachse a des Planetenorbits, wobei die restlichen Bahnelemente nahezu unverändert bleiben. Für eine genaue Darstellung zum Thema Migration sei auf [TL05] verwiesen. Einer der möglichen zugrundeliegenden physikalischen Prozesse ist die Interaktion der Planetesimalen bzw. des Protoplaneten mit Dichtewellen in der Scheibe. Es ist andererseits auch möglich, dass ein Protoplanet entlang seines Orbits eine Region geringere Dichte geschaffen hat. Dadurch ist er zunächst in dieser Region eingesperrt, wodurch er in weiterer Folge dem sich nach innen bewegendem viskosen Gas folgt und dadurch seine grosse Halbachse verringert. Schliesslich wird die Migration an einem bestimmten Punkt gestoppt (z.B. durch Gezeitenwechselwirkung mit dem Zentralstern oder Bereinigung der inneren Scheibe durch die Magnetosphäre), oder der Planet stürzt in den Zentralstern.

Prozesse die in der Lage sind, die grosse Halbachse in der Grössenordnung ihres ursprünglichen Wertes zu verändern nennt man *violent migration*. Diese Vorgänge liefern möglicherweise einen entscheidenden Beitrag zur Planetenentstehung. Der zugrundeliegende Mechanismus ist eine Rückkopplung der durch den Protoplaneten verursachten “Bugwelle” im Scheibenmedium auf den Protoplaneten selbst. Die Bewegung des, durch den Protoplaneten verursachten, Gravitationspotentials weicht von der “Keplerrotation” des benachbarten Mediums der Scheibe ab. Die dadurch verursachte Beschleunigung des Mediums verursacht, sich mit dem Protoplaneten bewegende, Druck- und Dichtewellen innerhalb des Scheibenmediums. Die dadurch entstehenden Regionen höherer Dichte stehen nun wieder in gravitativer Wechselwirkung mit dem Planeten, wodurch es zu einem Austausch an Drehmoment kommt, was eine Einwärtsbewegung des Planeten bewirkt. Allerdings: “*How Jupiter remained at its original distance is unclear in this theory*”[HW05].

Das Modell der *Jumping Jupiters* geht davon aus, dass sternnahe Orbits von Gasplaneten durch Wechselwirkungen mehrerer (mindestens drei) Planeten entstehen können. Bei diesem Szenario würde, bedingt durch gegenseitige Wechselwirkungen, ein Planet aus dem System geworfen werden. Von den verbleibenden Planeten würde einer einen sternnahen, annähernd kreisförmigen Orbit einnehmen, während die weiteren durch stark exzentrische Bahnen ausgezeichnet wären.

Die beschriebenen Theorien sind mögliche Erklärungsmodelle, um die oft vertretene Ansicht, dass Gasplaneten nur jenseits der typischerweise einige AE vom Stern entfernten Schneegrenze (*Iceline*) entstehen können, mit der Existenz von Gasplaneten auf sehr engen Orbits (z.B. 0.05AE bei 51 Pegasi b) in Einklang bringen zu können.

3.3.3 In-Situ-Entstehung

Im Gegensatz den in Abschnitt 3.3.2 beschriebenen Mechanismen, gibt es auch alternative Modelle, welche die Entstehung von Gasriesen auf sehr sternnahen Orbits vor Ort erklären können, z.B. [Wuc00]. Bei verhältnismässig kleinen protoplanetaren Scheiben kann demnach durchaus genug Material im gravitativen Einflussbereich eines Protoplaneten (der sog. *feeding zone*) mit sternnahem Orbit vorhanden sein, um die Entstehung vor Ort zu ermöglichen. Modellrechnungen zeigen, dass unter bestimmten Annahmen innerhalb von 100 Millionen Jahren Pegasi-Planeten auf Orbits mit $a = 0.05$ AE entstehen können. “*The rapid transition from 20 to 150 M_{Earth} also may provide a way to escape violent migration by quickly removing any relevant, migration-driving mass from the nebula disc before significant orbital decay occurs[.]*” [Wuc03].

Zwei kürzlich publizierte Entdeckungen lassen das In-Situ Szenario gegenüber der Migration wahrscheinlicher erscheinen. Im System HD188753 umkreist ein Pegasi-Planet eine Komponente

des Doppelsternsystems, der Abstand der beiden Sterne beträgt 12.3 AE [Kon05]. Dieser Stern hätte jedoch grosse Teile der protoplanetaren Scheibe akkretiert und den Bereich, in dem der Planet laut Migrationstheorie hätte entstehen sollen, leergefegt [HW05]. Weitere Anhaltspunkte für die In-Situ-Entstehung liefert die Entdeckung, dass der den Stern Gl 86 umrundende Stern kein Brauner sondern ein Weißer Zwerg ist [MN05]. Da ein Weißer Zwerg der Überrest eines ehemaligen Riesensternes ist, erscheint es unwahrscheinlich, dass in diesem System eine (vom Standpunkt der Migrationstheorie notwendige) Eis-Region existiert hat [HW05].

3.4 Stabilität der Planetenbahnen

Betrachtet man ein reales Planetensystem mit mehreren Planeten, so handelt es sich hierbei um eine Anwendung des *N-Körper-Problems*. Für dieses existiert keine allgemeine geschlossene Lösung, ebensowenig können A-priori-Aussagen über die Stabilität der Konfiguration gemacht werden. Möglicherweise wird eine bestimmte Anzahl an Körpern nach einer bestimmten Zeit aus dem System geworfen, ist also ab dann nicht mehr gravitativ an das System gebunden. Reale Planetenbahnen sind also *chaotische* Bahnen, infinitesimale Änderungen der Anfangsbedingungen können zu exponentiellen Änderungen der Bahn führen. Resonanzen der Umlauffrequenzen spielen eine große Rolle für die Stabilität, insbesondere das Überlappen mehrerer Resonanzen führt zu stark chaotischen Bahnen.

Ein klassisches Stabilitätskriterium geht auf Hill⁴ zurück. Der Hill-Radius (Gl. 3.1) bezeichnet den Radius, innerhalb dessen es um Planeten in einer bestimmten Entfernung zum Zentralstern stabile Mondbahnen geben kann. Innerhalb des Hill-Radius sind die Terme des Gravitationspotentials des Zentralsterns gegenüber jenen des Planeten vernachlässigbar, wodurch eine Mondbahn wiederum annähernd mittels des Zweikörperproblems beschrieben werden kann. Mittels des Hill-Radius können auch Aussagen über die Stabilität von Planetensystemen getroffen werden. Es ist zu erwarten, dass es keine wesentlichen Störungen der Planeten untereinander geben wird, wenn ihre Hill-Sphären⁵ nicht überlappen. Für Stabilität über ein Zeitintervall der Größenordnung des Alters des Sonnensystems (4.55 Milliarden Jahre) ist ein Faktor $\zeta = 11$ bis 13 in folgendem Ausdruck notwendig:

$$|a_i - a_{i+1}| > \zeta [r_H(a_i, M_i) + r_H(a_{i+1}, M_{i+1})] \quad (3.2)$$

Dabei bezeichnen die Indizes i und $i + 1$ jeweils zwei benachbarte Planeten. Bei einem Faktor $\zeta = 4$ bis 5 folgt für zwei Planeten permanente Stabilität.

⁴G.W. Hill: US-amerikanischer Astronom und Mathematiker des 19. Jahrhunderts.

⁵Unter einer Hill-Sphäre versteht man eine Kugel mit Radius r_H , die den Planeten umgibt. Durch die Umlaufbewegung des Planeten ergibt sich ein, die Planetenbahn umschliessender, Torus.

Kapitel 4

Evolutionäre Algorithmen

Evolution ist mehr als die Summe aller Revolutionen
Gerald Dunkl

Unter *Evolutionären Algorithmen* (EA) versteht man heuristische Verfahren zur Approximation der besten Lösung von Optimierungsaufgaben, die nach dem Vorbild evolutionärer Prozesse in der Natur entworfen sind. Die wesentlichen Elemente EA sind somit *Selektion*, *Mutation* und *Vererbung*. Zu den beiden Haupttypen Evolutionärer Algorithmen, nämlich *Evolutionstrategien* (ES) und *Genetische Algorithmen* (GA), wird der aktuelle Wissenstand, mit Schwerpunkt auf den ES überblicksmäßig dargestellt. Das Kapitel 5 beschreibt die Anwendung der hier vorgestellten allgemeinen Prinzipien auf das Problem der Bestimmung der Bahnparameter von Exoplaneten im Detail.

Heute finden Evolutionäre Algorithmen in vielen verschiedenen Bereichen, wie z.B. Biomedizin, Medizin, Mathematik, Wirtschaft und Ingenieurwissenschaften Anwendung (Siehe [BFM97] Abschnitt F,G) und es existieren zahlreiche Bibliotheken und Frameworks in den verschiedensten Programmiersprachen.

In der Terminologie im Bereich Evolutionäre Algorithmen werden zahlreiche Begriffe aus dem Bereich der biologischen Evolutionstheorie übernommen. Die Menge der aktuellen Kandidatenlösungen wird als *Population* bezeichnet. Eine in der Population enthaltene Kandidatenlösung wird als *Individuum* bezeichnet. Die Menge der Parameter, welche die Eigenschaft eines Individuums festlegen wird als *Chromosom* bezeichnet. Einen einzelnen Parameter des Chromosoms bezeichnet man als *Gen*. Gene können gemäß dem biologischen Vorbild bestimmte Werte einer endlichen Menge annehmen. Diese konkreten Werte bezeichnet man als *Allele*. Die Menge dieser konkreten Werte eines Chromosoms, der *Genotyp*, beschreibt vollständig die Eigenschaften der Kandidatenlösung, den *Phänotyp*. Die Bewertungsfunktion (die Zielfunktion des Optimierungsproblems) wird als *Fitnessfunktion*¹ bezeichnet. Bezüglich der ES weicht die Terminologie geringfügig vom biologischen Vorbild ab: da die Elemente des Chromosoms kontinuierliche Werte sind, spricht man hierbei nicht mehr von Genen, sondern von Parametern.

Da GA und ES viele Parallelen bezüglich ihrer Funktion aufweisen, lassen sich beide mit einem einheitlichen Formalismus beschreiben. Gemäß [Bä96], wird ein (allgemeiner) Evolutionärer Algorithmus als 8-Tupel definiert:

Definition 4

$$EA = (I, \Phi, \Omega, \Psi, s, \iota, \mu, \lambda),$$

wobei I die Menge der Individuen bezeichnet, $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Fitnessfunktion, welche den jeweiligen Individuen einen konkreten Wert zuweist. Ω bezeichnet die Menge der genetischen Operatoren ω :

$$\Omega = \left\{ \omega_{\Theta_1}, \dots, \omega_{\Theta_x} \mid \omega_{\Theta_i} : I^\lambda \rightarrow I^\lambda \right\} \cup \left\{ \omega_{\Theta_0} : I^\mu \rightarrow I^\lambda \right\}$$

¹Die Phrase “*survival of the fittest*” wurde zum Synonym für die Darwinsche Evolutionstheorie, wobei *fittest* als “*am besten angepasst*” zu verstehen ist. Charles Darwin verwendete in den ersten Ausgaben von “The Origin of Species” anstelle dieser, vom Ökonomen Herbert Spencer geprägten, Phrase den Ausdruck “*natural selection*”. Obwohl in weiteren Ausgaben von Darwin fallweise verwendet, wird heute von Evolutionsbiologen “*natural selection*” bevorzugt. Nichtsdestoweniger hat sich im Bereich der Algorithmik der Ausdruck *Fitnessfunktion* etabliert.

Die Operatoren werden durch Parameter gesteuert, welche mit $\Theta_i \subset \mathbb{R}$ bezeichnet werden. Analog dazu definiert man den Selektionsoperator

$$s_{\Theta_s} : (I^\lambda \cup I^{\lambda+\mu}) \rightarrow I^\mu$$

der aus entweder λ oder $\lambda + \mu$ Individuen μ auswählt. ι entspricht einer Booleschen Funktion, welche die Abbruchbedingung formuliert. Der Übergang von einer Generation zur nächsten, d.h. Anwendung der einzelnen genetischen Operatoren auf die Population, wird durch die Funktion Ψ beschrieben.

Die allgemeine Struktur eines Evolutinären Algorithmus sieht folgendermaßen aus:

```

EVOLUTIONARY ALGORITHM ()
1   $t \leftarrow 0$ 
2  initialize  $P(0) \leftarrow \vec{a}_1(0), \dots, \vec{a}_\mu(0) \in I^\mu$ 
3  evaluate  $P(0) : \Phi(\vec{a}_1(0)), \dots, \Phi(\vec{a}_\mu(0))$ 
4  while ( $\iota(P(t))! = \text{true}$ ) do
5    recombine  $P'(t) \leftarrow r_{\Theta_r}(P(t))$ 
6    mutate :  $P''(t) \leftarrow m_{\Theta_m}(P'(t))$ 
7    evaluate  $P''(t) : \Phi(\vec{a}_1''(t)), \dots, \Phi(\vec{a}_\lambda''(t))$ 
8    select :  $P(t+1) \leftarrow s_{\Theta_s}(P''(t) \cup Q)$ 
9     $t \leftarrow t+1$ 
10 endwhile

```

In den Zeilen 1 bis 3 findet die Initialisierung der Ausgangspopulation $P(0)$ mit (meist zufällig generierten) Individuen $\vec{a}_i, i = 1, \dots, \mu$ statt. Ein Individuum \vec{a} besteht entweder (im Falle von GA) ausschließlich aus den zugehörigen Parameterwerten (Genen) \vec{x} , oder (im Falle von ES) aus den Parameterwerten und den Strategieparametern. Nach der Initialisierung wird die Hauptschleife (4–10) solange durchlaufen, bis die Abbruchbedingung in 4 erfüllt ist. Die neue Population $P(t+1)$ wird aus der aktuellen Population $P(t)$ durch Anwendung der Operationen *Rekombination*, *Mutation* und *Selektion* gebildet. Dabei wurden die Bezeichnungen r_{Θ_r} und m_{Θ_m} für Rekombination und Mutation als Spezialfall der allgemeinen Genetischen Operatoren ω_{Θ_i} gewählt. In Zeile 7 findet die Bewertung der Individuen \vec{a}'' der Population $P''(t)$ statt. Die Fitnessfunktion Φ entspricht oft direkt der Zielfunktion f_{obj} (welche die Lösungsgüte eindeutig bestimmt), oftmals erweisen sich jedoch auch adaptierte Funktionen, die Individuen mit schlechterem f_{obj} , jedoch vielversprechenden Eigenschaften bevorzugen, als vorteilhaft. In Zeile 8 findet schliesslich die Selektion statt, wobei der Selektionsoperator s_{Θ_s} die besten μ Individuen aus $(P''(t) \cup Q)$ auswählt, wobei $Q \in \{\emptyset, P(t)\}$.

Die im Folgenden beschriebenen Varianten gliedern sich in diese allgemeine Struktur ein, Unterschiede treten bei der Art der Kodierung der Parameter eines Individuums und bei der konkreten Umsetzung der angeführten Operationen auf.

4.1 Genetische Algorithmen

Neben den in Abschnitt 4.2 beschriebenen Evolutionsstrategien sind die Genetischen Algorithmen (GA) eine wichtige (wahrscheinlich allgemein bekanntere) Gruppe evolutionärer Algorithmen. Der in dieser Arbeit (Kapitel 5) präsentierte Algorithmus fällt jedoch in die Kategorie der Evolutionsstrategien. Da sich jedoch einige Prinzipien und Mechanismen der GA auf ES übertragen lassen, werden hier die wichtigsten Aspekte der GA dargestellt.

Erstmals traten Genetische Algorithmen auf, als Biologen Ende der 60er Jahre versuchten die Evolution der Natur zu simulieren. Genetische Algorithmen in der heutigen Form wurden

erstmalig 1975 von Holland entwickelt ([Hol75]). Heute sind GA eine sehr verbreitete Methode, die in vielen verschiedenen Gebieten zum Einsatz kommt.

4.1.1 Kodierungen

Prinzipiell kann man zwei grundlegende Arten an Kodierungen unterscheiden. Betrachtet man Probleme, bei welchen eine bestimmte Anzahl diskreter Parameter optimiert werden soll, entspricht ein Gen naheliegenderweise einem solchen Parameter und jedem Gen wird eine bestimmte endliche Menge an Allelen zugeordnet. Bei der Optimierung kontinuierlicher Parameter wird oftmals die Kodierung als Bitstring herangezogen, wobei jedem Parameter ein bestimmter Teilbereich dieses Bitstrings zugeordnet wird. Die Dekodierung erfolgt in diesem Fall einfach durch die Interpretation des Teilstrings als Binärzahl. Bei kombinatorischen Problemen, wie z.B. dem *Traveling-Salesman-Problem* werden beispielsweise häufig *Permutationskodierungen* verwendet. Der Wertebereich eines Gens ist dabei die Menge aller vorkommenden Elemente und das Chromosom repräsentiert somit die jeweilige Permutation, bzw. Kombination der Elemente. Hierbei müssen spezielle Mutations- und Rekombinationsoperatoren verwendet werden, da prinzipiell ungültige Genotypen (mehrfachiges bzw. zu häufiges Vorkommen eines Elementes) entstehen können.

4.1.2 Rekombination

Im Gegensatz zu Evolutionsstrategien ist bei Genetischen Algorithmen die Rekombination der primäre Operator. Die grundlegende Idee der Rekombination ist, verschiedene positive Attribute der Elterngeneration in einem neuen Individuum zu vereinigen. Der Rekombinationsoperator $r_{\Theta_r} : I^2 \rightarrow I$ muss an die jeweilige Problemstellung angepasst werden um einerseits die speziellen Eigenschaften und Einschränkungen des Problems zu berücksichtigen, und andererseits problemspezifische Eigenschaften zur Erzeugung besserer Individuen zu verwenden. Die einfachste Variante der Rekombination ist das *1-point crossover*. Dabei wird in den Chromosomen zweier (z.B. zufällig ausgewählter) Eltern ein Schnittpunkt festgelegt und es werden zwei Nachkommen aus den jeweils komplementären Teilen der Chromosomen der Eltern erzeugt. Die Rekombination wird entweder für alle selektierten Individuen, oder für einen mittels Wahrscheinlichkeiten $p_c (= \Theta_r)$ ausgewählten Teil davon, durchgeführt.

Eine häufige Erweiterung des 1-point crossovers stellt das *2-point crossover*, bzw. das *multi-point crossover* dar, bei welchen zwei, bzw. mehrere Crossoverpoints verwendet werden. Diese Varianten bewirken im Allgemeinen, dass weniger Schemata² erhalten bleiben.

Rekombinationsoperatoren für Permutationen

Im Folgenden bezeichnen A und B jeweils die Chromosomen der Eltern und A' und B' die Chromosomen der Nachfolgeneration. Das wichtigste Kriterium zur Auswahl eines Rekombinationsoperators ist die Relevanz der Erhaltung der Positionen bzw. der Reihenfolge der Gene bezüglich des jeweiligen Problems. Besonders häufig verwendete Operatoren sind im folgenden dargestellt:

- *Partially Matched Crossover (PMX)*

Ein zufällig gewählter Crossover-Bereich wird exakt ausgetauscht, die dadurch entstandenen Verletzungen der *Constraints*³ werden elementweise in den vom Crossover nicht betroffenen Bereichen korrigiert.

²siehe Abschnitt 4.1.5

³z.B. der Bedingung, dass jedes Element nur einmal im Chromosom enthalten sein darf;

- *Order Crossover (OX)*
Nach der zufälligen Auswahl zweier Crossoverpoints werden in einem Chromosom die im Crossoverbereich des anderen Elternteils vorkommenden Gene gelöscht. Danach werden in den Chromosomen beider Eltern die Gene nach folgendem Prinzip umgeordnet: Zuerst die Gene des eigenen Crossover-Bereichs, dann die freien Plätze und danach die verbleibenden Gene. Abschliessend werden die freien Plätze mit den Genen des anderen Crossoverbereichs aufgefüllt.
- *Cycle Crossover (CX)*
Hierbei wird kein Crossover-Bereich bestimmt, sondern einzelne Gene werden von den Elternteilen unter Beibehaltung ihrer ursprünglichen Position übernommen. In A' wird zunächst das erste Gen von A übernommen. Der Wert an dieser Stelle in B kann nun nicht mehr übernommen werden, weshalb dieser Wert wiederum, unter Beibehaltung dessen ursprünglicher Position, von A übernommen werden muss. Dieses Prinzip muss solange fortgesetzt werden, bis in B an der Stelle des letzten übernommenen Wertes ein schon in A' vorhandener Wert gefunden wird (=Zyklus). Die freien Plätze in A' werden mit den Genen der jeweiligen Position aus B aufgefüllt, und mit B' wird analog verfahren.
- *Uniform Order Based Crossover (UOBX)*
Für jede Position in A' wird zufallsbasiert entschieden, ob das Gen von A übernommen wird. Die verbleibenden Positionen werden mit in A' noch nicht vorkommenden Genen, in der Reihenfolge von B übernommen.

4.1.3 Mutation

Die Mutation ist bei GA der sekundäre Operator. Er dient zur Einbringung von neuem bzw. verloren gegangenem Genmaterial in die Population. Die zufällige Änderung einzelner Gene mit einer geringen Wahrscheinlichkeit p_m ist die einfachste Variante der Mutation m_{Θ_m} (in diesem Fall $\Theta_m = p_m$). Bei Permutationskodierungen liefert diese Variante der Mutation ebenfalls ungültige Individuen, weshalb oftmals folgende Varianten zum Einsatz kommen:

- *Reciprocal Exchange*
Hierbei werden zwei zufällig ausgewählte Gene vertauscht.
- *Insertion*
Ein zufällig gewähltes Gen wird an einer beliebigen anderen Stelle eingefügt, der dazwischen liegende Bereich wird entsprechend verschoben.
- *Inversion*
Ein zufällig gewählter Bereich wird bezüglich der Reihenfolge invertiert.
- *Displacement*
Ein zufällig gewählter Bereich wird innerhalb des Chromosoms verschoben.

4.1.4 Selektion

Unter Selektion versteht man die Auswahl bestimmter Individuen aus der aktuellen Population, die als Eltern der nächsten Generation fungieren. Der Selektionsoperator wird mit s_{Θ_s} bezeichnet. Um die Population in Richtung besserer Lösungen zu lenken, werden bevorzugt bessere Individuen ausgewählt. Der Vorgang läuft normalerweise teilweise randomisiert ab, um durch die (seltene) Auswahl schlechterer Individuen die vorzeitige Konvergenz zu lokalen Optima zu verhindern. Ein wichtiger Parameter ist hierbei der Grad der Bevorzugung guter gegenüber

schlechteren Individuen, der *Selektionsdruck*. Ist der Selektionsdruck zu hoch, führt das im Allgemeinen zu einer zu starken Bevorzugung guter Individuen, wodurch die Vielfalt der Population geringer wird, da sich gute Individuen rasch vermehren und somit viele Individuen in der Population sehr ähnliche Eigenschaften aufweisen (*Superindividuen*). Dadurch kann es zur vorzeitigen Konvergenz des Algorithmus gegen ein lokales Optimum kommen. Im Gegensatz dazu führt zu niedriger Selektionsdruck zu einer geringen Vermehrungsrate guter Individuen, und somit zu einer (zu) langsamen Konvergenz des Algorithmus. Der Selektionsdruck ist somit der kritischste Strategieparameter bzgl. der Konvergenzgeschwindigkeit und Lösungsgüte bei evolutionären Algorithmen. Oftmals werden gewisse Transformationen auf die Fitnesswerte angewandt, da die Voraussetzung der ausschließlich positiven Fitnesswerte nicht immer erfüllt ist (z.B. *Linear static/dynamic Scaling*), oder Skalierungen bzgl. der Verteilung der Fitnesswerte in der Population vorgenommen werden sollen (z.B. *Logarithmic/Exponential Scaling*), oder um bestimmte Fitnesswerte (z.B. Ausreißer) auszuschließen.

“*Theoretical investigations in the interaction between scaling and selection do not exist, which is plausible due to the complexity of such efforts. However, even empirical comparisons of the performance of Genetic Algorithms relying on different scaling methods have not been performed, such that the choice of a scaling method and its parameterization can be thought of as a ‘black art.(sic!)’*” [Bä96].

Im Folgenden eine Auflistung häufig verwendeter Selektionsmethoden:

- *Fitness Proportional Selection*

Diese auch *roulette-wheel* genannte Selektionsmethode wählt jedes Individuum \vec{a}_i der Population mit einer Wahrscheinlichkeit $p_s(\vec{a}_i)$ ($= \Theta_s$), die dem Fitnesswert des Individuums direkt proportional ist.

$$p_s(\vec{a}_i) = \frac{\Phi(\vec{a}_i)}{\sum_{j=1}^{\mu} \Phi(\vec{a}_j)} \quad (4.1)$$

n bezeichnet dabei die Populationsgröße und es gilt für alle i : $\Phi(i) > 0$.

- *Rank Selection*

Bei der Rank Selection werden die Individuen gemäß ihrer Fitness geordnet. Für die Selektion ist dann nur mehr die Position in dieser Liste ausschlaggebend, die relativen Fitnessunterschiede einzelner Individuen werden nicht berücksichtigt. Beispielsweise ist beim *Linear Ranking* die Selektionswahrscheinlichkeit eines Individuums direkt proportional zu dessen Rang, aber auch nicht lineare Gewichtungen der Ränge sind möglich. Die Rank Selection ist ein Ansatz um dem Superindividueneffekt bei ungünstigen Verteilungen der Fitnesswerte innerhalb der Population entgegenzuwirken.

- *Tournament Selection*

Bei der Tournament Selection wird eine bestimmte Anzahl k an Individuen zufällig (gleichverteilt) ausgewählt und aus jenen das Beste selektiert. Diese Variante erweist sich aufgrund ihrer Effizienz für grosse Populationen als besonders vorteilhaft, jedoch auch in Situationen, wo einzelne Individuen nicht unabhängig von anderen bewertet werden können. Über die Anzahl k kann der Selektionsdruck direkt gesteuert werden.

4.1.5 Schema-Theorem

Mithilfe des in diesem Abschnitt vorgestellten Schema-Theorems wird versucht, die Funktionsweise eines GA theoretisch zu erklären. Für eine formale Darstellung sei auf [Bä96] verwiesen. Die zur Herleitung und Diskussion des Schema-Theorems benötigten Definitionen sind in Tabelle 4.1.5 zusammengefasst. Unter einem Schema H versteht man ein Chromosom das neben den zulässigen Allelen auch ein Wildcard-Metasymbol “*” enthalten kann, welches für beliebige

Symbol	Bedeutung
l	Anzahl der Gene eines Individuums
A	Wertemenge der Gene
$*$	Wildcard-Metasymbol, welches beliebige Allele repräsentiert
k	Kardinalität von A
$P(t)$	Population zum Zeitpunkt t
n	Populationsgrösse
H	Schema, das die Teilmenge der Individuen mit gleichen Werten an bestimmten Positionen beschreibt Bsp.: $H = *001$ repräsentiert 0001 und 1001 wenn $A = \{0, 1\}$.
$o(H)$	<i>Ordnung eines Schemas H</i> ; Anzahl der Allele ungleich “*”
$\delta(H)$	<i>Definierende Länge</i> ; Abstand zwischen den am weitesten links bzw. rechts liegenden Allelen ungleich “*”
$f(H, t)$	<i>Fitness eines Schemas</i> ; Mittlere Fitness aller von H repräsentierten Individuen in $P(t)$
$m(H, P(t))$	Häufigkeit eines Schemas H in $P(t)$

Tabelle 4.1: Definitionen bzgl. des Schema-Theorems

Werte an dieser Stelle steht. Ein Schema repräsentiert somit alle möglichen Chromosomen bei welchen alle Gene mit jenen des Schemas übereinstimmen. Insgesamt gibt es $(k + 1)^l$ Schemata, jedes einzelne Individuum enthält die Ausprägung von 2^l Schemata, woraus folgt, dass in der Population zwischen 2^l und $n \cdot 2^l$ Schemata enthalten sind. Bei Roulette-Wheel-Selection ergibt sich für die Häufigkeit eines Schemas in der Population $P(t + 1)$:

$$m(H, P(t + 1)) = m(H, P(t)) \cdot \frac{f(H, t)}{\bar{f}} \quad \text{mit} \quad \bar{f} = \frac{\sum_{j=1}^n f(j)}{n} \quad (4.2)$$

Für Schemata mit überdurchschnittlicher Fitness $f(H, t) = \bar{f} + c\bar{f}$ gilt daher

$$m(H, P(t + 1)) = m(H, P(t)) \cdot (1 + c), \quad (4.3)$$

was über alle bisherigen Generationen hinweg ein exponentielles Wachstum dieses Schemas ergibt:

$$m(H, P(t)) = m(H, P(0)) \cdot (1 + c)^t \quad (4.4)$$

Da die Populationsgrösse beschränkt ist, und sich die durchschnittliche Fitness \bar{f} über die Generationen hinweg erhöht, gilt 4.2 nur näherungsweise, tatsächlich ist die Funktion natürlich durch n beschränkt. Auch für die Rekombination kann man Aussagen treffen: Mit der Wahrscheinlichkeit, dass der Crossover-Punkt in den Bereich der definierenden Länge fällt $p_{\text{dest}} = \frac{\delta(H)}{l-1}$ kann man eine untere Schranke für die Überlebenswahrscheinlichkeit eines Schemas angeben

$$p_{\text{surv}} \geq 1 - p_c \cdot \frac{\delta(H)}{l-1}, \quad (4.5)$$

wobei p_c die Rekombinationswahrscheinlichkeit bezeichnet. Dieser Term tritt als zusätzlicher Faktor in 4.2 auf. Für die Mutation gilt, dass ein Schema genau dann überlebt, wenn alle fixierten Gene nicht mutiert werden. Für die Überlebenswahrscheinlichkeit

$$p_{\text{surv}} = (1 - p_m/l)^{o(H)} \quad (4.6)$$

gilt für kleine Mutationswahrscheinlichkeiten p_m näherungsweise

$$p_{\text{surv}} \approx 1 - o(H) \cdot p_M/l. \quad (4.7)$$

Auch dieser Term geht in 4.2 zusätzlich ein, und somit gilt näherungsweise

$$m(H, P(t+1)) \geq m(H, P(t)) \cdot \frac{f(H, P(t))}{\bar{f}} \left(1 - p_c \cdot \frac{\delta(H)}{l-1} - o(H) \frac{p_m}{l}\right), \quad (4.8)$$

wobei Selektion, Rekombination und Mutation berücksichtigt ist. Dadurch ergeben sich die folgenden beiden Aussagen:

Theorem 4 (Schema-Theorem) *Schemata mit hoher Fitness f , kleiner definierender Länge $\delta(H)$ und niedriger Ordnung $o(H)$ wachsen in der Population exponentiell an.*

Theorem 5 (Building-Block-Hypothese) *Die in Theorem 4 beschriebenen Schemata bezeichnet man als building-blocks. Durch das Zusammenfügen von building blocks führen GA gewissermassen eine asymptotisch optimale Suche nach dem Optimum durch.*

Aus den Theoremen 4 und 5 kann gefolgert werden, dass die Kodierung dem Problem stets angepasst sein muss – geringe Änderungen im Genotyp sollen auch nur zu kleinen Änderungen im Phänotyp führen.

4.1.6 Effizienzsteigerung und Constraint Handling

Zahlreiche Mechanismen zur Effizienzsteigerung eines Evolutionären Algorithmus sind denkbar, die populärsten Varianten werden in diesem Abschnitt kurz beschrieben. Unter *Elitismus* versteht man, dass die k besten Individuen ($0 < k < n$), wobei n die Populationsgrösse bezeichnet, immer in die nächste Generation übernommen werden. Der Vorteil hierbei ist, dass die Fitness des besten Individuums monoton wächst, allerdings ist der Algorithmus dadurch auch anfälliger für Superindividuen und somit für multimodale Funktionen eher schlechter geeignet. Eine andere Strategie besteht darin, pro Generationsschritt nur einen Teil der Individuen aus der Population neu zu erzeugen. Welche Individuen ersetzt werden wird dabei durch (gleichverteilte) Zufallsauswahl bestimmt. Der wesentliche Vorteil dieser, als *Overlapping Populations* bezeichneten, Vorgehensweise liegt vor allem in der Speicherplatzersparnis. Eine häufige Strategie vorzeitiger Konvergenz entgegenzuwirken ist das *Crowding Model*. Dabei wird die Population zunächst in Gruppen unterteilt. Nach der Erzeugung jedes neuen Individuums wird eine Gruppe zufällig gewählt, und das dem neuen Individuum in dieser Gruppe ähnlichste Individuum durch letzteres ersetzt. Diese Strategie wirkt dem Superindividuumseffekt entgegen, da die Artenvielfalt gefördert wird.

In vielen Fällen kann es vorkommen, dass Chromosomen bestimmten Randbedingungen genügen müssen. Dem Umstand, dass dadurch prinzipiell ungültige Lösungen entstehen können, muss daher Rechnung getragen werden. Eine Problemkodierung zu finden, der diese Randbedingungen inhärent sind, ist jedoch nicht immer möglich. Eine einfache aber oftmals auch problematische Vorgehensweise ist *Penalization*, wobei ungültigen Lösungen schlechtere Fitnesswerte erhalten. Das Problem hierbei besteht darin, eine geeignete Gewichtung für die Bestrafung zu finden. Alternativ dazu können ungültige Lösungen mittels *Repairing* in gültige umgewandelt werden. Diese Änderungen können entweder nur zur Bewertung verwendet werden (Baldwin Effekt), oder aber auch direkt im Genotyp vermerkt werden (Lamarckscher Ansatz). Es erweist sich in der Praxis oft als günstig, bei in etwa 5% der Fälle Änderungen im Genotyp vorzunehmen.

4.2 Evolutionsstrategien

Evolutionsstrategien (ES) wurden erstmals in den 70er Jahren des vergangenen Jahrhunderts von Bienert, Rechenberg und Schwefel entwickelt. Die ersten Anwendungen waren Optimierungsprobleme in der Hydrodynamik, zum Beispiel die Optimierung der Form einer gebogenen Röhre, verschiedener Ansaugrohre oder Düsen, und führten zu verblüffend guten Resultaten. Mit der Zeit fand das Prinzip der ES auch vermehrte Anwendung bei der Lösung numerischer Probleme. Die anfänglich verwendete diskrete Mutation⁴ wurde in weiterer Folge⁵ von einer kontinuierlichen, normalverteilten⁶ Mutation ersetzt.

Die einfachste Variante einer ES wird üblicherweise $(1+1)$ -ES genannt. Die "Population" besteht dabei lediglich aus einem Individuum. Dabei entsteht ein neues Individuum, indem alle Gene des Elternteils entsprechend einer Normalverteilung mutiert werden. Von Elternteil und Nachkomme überlebt lediglich das Individuum mit dem besseren Fitnesswert. Um die negative Eigenschaft des Nichtvorhandenseins einer Population bei der $(1+1)$ -ES zu beheben, entwickelte Rechenberg die $(\mu+1)$ -ES. Dabei werden μ Eltern verwendet um ein neues Individuum zu erzeugen, welches dann gegebenenfalls das Individuum mit dem niedrigsten Fitnesswert aus der Population ersetzt.

Als direkte Verallgemeinerung der zugrundeliegenden Idee des $(\mu+1)$ -ES, kann die $(\mu+\lambda)$ -ES und in weiterer Folge die (μ, λ) -ES angesehen werden, welche von Schwefel entwickelt wurde [Sch75, Sch77, Sch81]. Bei der $(\mu+\lambda)$ -ES werden aus μ Individuen λ Nachkommen erzeugt⁷, die neue Population entsteht, indem aus der Vereinigung der Eltern mit den Nachkommen wiederum die besten μ Individuen ausgewählt werden. Im Gegensatz dazu werden die μ besten Individuen bei der (μ, λ) -ES nur aus den λ Nachkommen der vorigen Population gewählt. "*Currently, the (μ, λ) -ES characterizes the state-of-the-art in Evolution Strategy research [...]*" [Bä96], weshalb in weiterer Folge nur mehr diese Variante behandelt wird.

Ein Individuum $\vec{a} = (\vec{x}, \vec{\sigma}, \vec{\alpha})$ besteht aus dem Parametervektor \vec{x} und den Vektoren der Strategieparameter $(\vec{\sigma}, \vec{\alpha})$, welche in Abschnitt 4.2.2 genauer beschrieben werden.

4.2.1 (μ, λ) -Selektion

Im Gegensatz zu den GAs erfolgt die Selektion bei ES im Allgemeinen deterministisch. Die Generation $P(t+1)$ wird lediglich aufgrund von $P(t)$ gebildet, wodurch jedes Individuum nur eine Generation überlebt. Formal bezeichnet man den Operator mit $s_{\{\mu, \lambda\}} : I^\lambda \rightarrow I^\mu$ und es gilt $s(P(t)) = P(t+1)$.

Diese Vorgehensweise ist vorteilhaft bzgl. der Selbstadaptierung der Strategieparameter σ (Abschnitt 4.2.2) und führt zu seltenerer vorzeitigen Konvergenz. Der Fitnesswert des besten Individuums pro Generation steigt aufgrund dieser Vorgehensweise im Allgemeinen nicht monoton, der Algorithmus kann also prinzipiell bereits gefundene Lösungen vergessen.

Der Selektionsdruck wird durch das Verhältnis μ/λ festgelegt. Dieses Verhältnis ist somit der wichtigste Parameter, der die Suche charakterisiert. Kleine Werte von μ (bei konstantem λ) bedeuten eine eher pfadorientierte Suche, während grössere Werte eine volumensorientierte Suche bedingen.

Neben diesem Prototypen der (μ, λ) -Selektion existieren zahlreiche Ansätze, die jedoch erheblich vom Grundprinzip der vollkommen deterministischen Selektion mit Rücksichtnahme auf die Selbstadaptierung der Strategieparameter abweichen. *Elitismus* führt zu einer genaueren Parameterbestimmung innerhalb eines lokalen Optimums, inwieweit die globalen Konvergenzeigenschaften dadurch negativ beeinflusst werden, muss für konkrete Probleme individuell ent-

⁴Die Mutation einzelner Gene erfolgte binomialverteilt, mit vorgegebener Varianz

⁵vor allem aufgrund der Resultate von Schwefels Diplomarbeit [Sch65]

⁶normalverteilt, mit Erwartungswert 0 und vorgegebener Varianz

⁷woraus folgt, dass $\lambda \geq \mu$, $\lambda = \mu$ entspricht jedoch einer zufälligen Suche

schieden werden. Da die klassische (μ, λ) -ES in jedem Zeitschritt auch für “schlechte” Individuen eine Vielzahl aufwändiger Mutationen und Bewertungen durchführt, sind Verbesserungen und insbesondere die dadurch notwendigen Verbesserungen der Selektionsmethode aktueller Gegenstand der Forschung. In [RY02] wird eine *kontinuierliche Selektion* beschrieben, welche auch für die Selbstadaptierung der Strategieparameter keine Einschränkung darstellt.

4.2.2 Mutation

Die prinzipielle Vorgehensweise bei der Mutation ist, eine normalverteilte Zufallsgrösse zu den einzelnen Parametern zu addieren.

$$\vec{x}' \leftarrow \vec{x} + \vec{N}(0, \sigma) \quad (4.9)$$

$\vec{N}(0, \sigma)$ stellt einen Vektor unabhängig normalverteilter Zufallsvariablen mit Mittelwert 0 und Varianz σ dar. In [Rec73] wird die Herleitung einer optimalen Strategie zur Einstellung der Varianzen für ausgewählte Probleme angegeben, welche besagt, dass der Anteil der erfolgreichen Mutationen in etwa 1/5 betragen soll (*1/5-Erfolgsregel*). σ ist bei höheren Erfolgsraten zu vergrößern, sonst zu verkleinern. In [Sch81] wird eine mögliche Umsetzung für die Aktualisierung von $\sigma = \sigma(t)$ angegeben. Allerdings ist die beschriebene Vorgehensweise prinzipiell problematisch, da nur ein σ für alle Parameter \vec{x}_i verwendet wird, und dadurch etwaige unterschiedliche Skalierungen der einzelnen Parameter nicht berücksichtigt werden können. Außerdem werden globale Optima aufgrund der Struktur der Zielfunktion im Bereich lokaler Optima oftmals nicht erreicht. Bei den modernen Varianten der ES wird deshalb zur Anpassung der σ -Werte kein eigener Meta-Algorithmus verwendet, sondern der Evolutionäre Algorithmus selbst zu ihrer Optimierung verwendet.

Selbstadaptierung der Strategieparameter

Zu jedem Parameter x_i wird ein Wert σ_i zugeordnet, wodurch $\vec{a} = ((x_1, \dots, x_i), (\sigma_1, \dots, \sigma_i))$. Die Strategieparameter σ_i werden nun nicht mehr durch einen expliziten Meta-Algorithmus gesteuert, sondern vom EA analog zu den Parametern selbst adaptiert, was eine Erweiterung der Mutation erfordert.

$$\sigma'_i = \sigma_i \cdot e^{N(0, \tau_0) + N_i(0, \tau)} \quad (4.10)$$

$$x'_i = x_i + N_i(0, \sigma'_i) \quad (4.11)$$

$$\tau_0 \propto 1/\sqrt{2\sqrt{n}} \quad (4.12)$$

$$\tau \propto 1/\sqrt{2n} \quad (4.13)$$

Ein neuer Strategieparameter entsteht demnach durch Multiplikation mit einer logarithmischen Normalverteilung, welche durch τ_0 und τ parametrisiert wird. Hierbei stellt τ_0 einen globalen Parameter dar, der für jedes Individuum nur einmal berechnet wird. Im Gegensatz dazu, wird τ für jeden Parameter neu berechnet. Die Parameter τ_0 und τ sind vergleichbar mit den Lernraten künstlicher Neuronaler Netze, die Proportionalitätskonstante in den Gleichungen 4.12 und 4.13 beträgt (laut [Sch77]) in etwa 1. Die multiplikativen Anpassungen garantieren stets positive σ -Werte, ebenfalls sind kleine Änderungen häufiger als große. Die logarithmische Normalverteilung garantiert weiters, dass ein bestimmter Multiplikationsfaktor mit der selben Wahrscheinlichkeit wie sein reziproker Wert vorkommt. Die neuen Parameterwerte entstehen wiederum durch Addition einer Normalverteilung mit Mittelwert Null und der modifizierten Streuung σ' .

Korrelierte Mutation

Da jeder Strategieparameter σ_i die Streuung einer Normalverteilung $N(0, \sigma_i)$ bezeichnet, kann man $\vec{\sigma}$ ein Ellipsoid zuordnen, welches die Wahrscheinlichkeiten des nächsten Mutationsschrittes wiedergibt. Bei voneinander stark abhängigen Parametern ist es oft vorteilhaft, diese Mutationsellipsoide entsprechend des Gradienten der Zielfunktion auszurichten (Abb. 4.1, 4.2). Dazu verwendet man eine verallgemeinerte n -dimensionale Normalverteilung mit der Dichtefunktion

$$p(\vec{z}, A) = \sqrt{\frac{|A|}{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2}\vec{z}^T A \vec{z}} \quad (4.14)$$

mit der Kovarianzmatrix $A^{-1} = c_{j,k}$. Um sicherzustellen, dass A^{-1} immer positiv definit ist, werden in der Praxis äquivalente *Rotationswinkel*

$$\tan 2\alpha_{j,k} = 2c_{j,k}/(\sigma_j^2 - \sigma_k^2) \quad (4.15)$$

verwendet. Für jedes Individuum müssen nun zusätzlich $n(n-1)/2$ Rotationswinkel mitgeführt und mitoptimiert werden. Die Mutation wird um

$$\alpha'_{j,k} = \alpha_{j,k} + N_{j,k}(0, \beta) \quad (4.16)$$

erweitert, mit $i = 1 \dots n$, $j = 2 \dots n$ und $k = 1 \dots j - 1$. Dabei ist β ein zusätzlicher Strategieparameter, wobei 5° laut [Bä96] einen günstigen Wert darstellt.

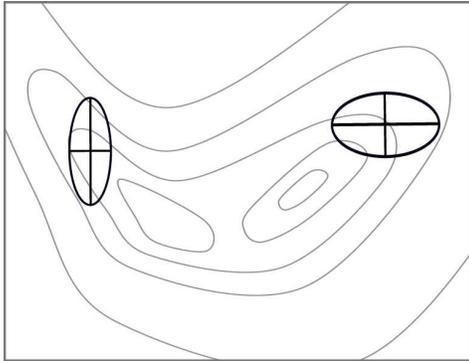


Abbildung 4.1: Unkorrelierte Mutation

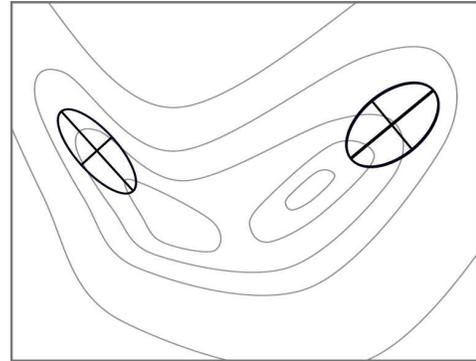


Abbildung 4.2: Korrelierte Mutation

Der Mutationsoperator der (μ, λ) -ES mit Berücksichtigung der Selbstadaptierung der Strategieparameter lautet also in der allgemeinen Notation $m_{\{\tau, \tau_0, \beta\}} : I \rightarrow I$.

4.2.3 Rekombination

Die Rekombination ist bei ES üblicherweise von sekundärer Bedeutung und kann optional vor der Mutation durchgeführt werden. Seien

$$\vec{a}_a = ((x_{a,1}, \dots, x_{a,n}), (\sigma_{a,1}, \dots, \sigma_{a,n}))$$

$$\vec{a}_b = ((x_{b,1}, \dots, x_{b,n}), (\sigma_{b,1}, \dots, \sigma_{b,n}))$$

zwei Individuen der Elterngeneration. Man unterscheidet folgende häufige Varianten der Rekombination:

discrete	$x'_i = x_{a,i} \text{ or } x_{b,i}$
intermediate	$x'_i = u_i x_{a,i} + (1 - u_i) x_{b,i}$
global discrete	$x'_i = x_{a,i} \text{ or } x_{b,i}$
global intermediate	$x'_i = u_i x_{a,i} + (1 - u_i) x_{b,i}$

Dabei kann u_i entweder konstant oder bewertungsabhängig gewählt, oder als Zufallsvariable realisiert werden. Experimentelle Resultate zeigen, dass oftmals für die Parameter *discrete crossover*, für die Strategieparameter *intermediate crossover* vorteilhaft ist. Die ersten beiden Varianten unterscheiden sich von ihren globalen Analoga durch die erneute Zufallsauswahl des zweiten Individuums für jeden Parameter.

4.3 Diskussion

GAs stellen eine weit verbreitete, robuste Methode zur Optimierung verschiedenster Problemstellungen dar. Jedoch sind ES bzgl. der Optimierung kontinuierlicher Parameter den GA oftmals sowohl hinsichtlich der Konvergenzeigenschaften zu dem globalen Optimum als auch der Lösungsgüte überlegen. Durch die binäre Kodierung der GAs ermöglichen diese nur eine Suche auf einem durch die Genauigkeit der Zahlendarstellung der Kodierung bestimmten Gitter. Darüber hinaus stellt die binäre Kodierung eine Verletzung der Bedingung der Lokalität bei Mutationen dar. Dem gegenüber steht der Nachteil der ES, dass diese eine sehr genaue Anpassung an das jeweilige Problem erfordern, weshalb in vielen Anwendungen GAs der Vorzug gegeben wird. Im folgenden Kapitel werden diese Aspekte genauer untersucht, und schließlich die konkrete Umsetzung einer ES zur Bestimmung der Bahnparameter extrasolarer Planeten beschrieben.

Kapitel 5

Evolutionstrategie zur Bestimmung der Bahnparameter von Exoplaneten

Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen.
Immanuel Kant

Aufbauend auf die allgemeine Beschreibung von Evolutionstrategien (ES) in Kapitel 4, behandelt dieses Kapitel den konkreten Aufbau der ES zur Bestimmung der Bahnelemente aufgrund von Radialgeschwindigkeitsdaten. Dieses Kapitel stellt somit den Hauptteil dieser Arbeit dar.

Die einzelnen Operatoren wie Mutation und Rekombination werden genau beschrieben. Des Weiteren werden (physikalische) Einschränkungen an den Lösungsraum beschrieben, die einerseits notwendig sind, um eindeutige Ergebnisse zu erhalten, andererseits, um Lösungen instabiler Orbits auszuschließen.

5.1 Vergleich mit ähnlichen Ansätzen

In [Cha95] wird erstmals die Anwendung Genetischer Algorithmen (GA) in der Astronomie und Astrophysik beschrieben. Als mögliche Anwendung wird das verwandte Problem der Erkennung von Pulsationsperioden in δ -Scuti Sternen diskutiert. Es wird angemerkt, dass die dezimale Darstellung kontinuierlicher Parameter bzgl. Konvergenzgeschwindigkeit und Lösungsgüte vorteilhaft sein kann, dies jedoch eine genauere Abstimmung der Parameter erfordert, weshalb Genetischen Algorithmen mit deren binärer Kodierung bzgl. der beschriebenen Anwendungsmöglichkeiten der Vorzug gegeben wird. Bezüglich der Multiperiodenfits werden Konvergenzprobleme bei den hochfrequenten Signalanteilen erwähnt.

In [LC95] wird die Anwendung eines GA zur Suche nach Nachbarschaften lokaler Minima mit anschließender lokaler Methode bei Pulsarplaneten angeführt. Butler et al. verwenden in [BMF⁺99] eine GA-Routine zur Verifikation der gefundenen 3-Planeten-Lösung des ν -Andromeda Systems. Laughlin und Chambers untersuchen in [LC01] das System GJ 876, das zwei Planeten in 2:1 Resonanz enthält, welche starke Wechselwirkung aufweisen. Mittels N-Körper Rechnungen in Kombination mit einem Levenberg-Marquardt Algorithmus finden die Autoren ein verbessertes Modell zu den Beobachtungsdaten. Mittels eines GA wird die Lösung bestätigt, indem Jacobi-Koordinaten verwendet werden, und die Periheldrehung als zu den Bahnelementen zusätzlicher Parameter verwendet wird. In [GKM03] und [GKM05] wird das System HD 160691 unter anderem mittels GA analysiert, wobei Einschränkungen an die Umlaufperioden der beiden Planeten gemacht wurden und die Zielfunktion mittels einer Penalty für mögliche instabile Lösungen gewichtet wird. Die Stabilität wird mittels MEGNO (Mean Exponential Growth of Nearby Orbits, [CS00]) getestet. Diese, als GAMP (GA mit MEGNO Penalty) bezeichnete, Variante scheint in Moment die *State-of-art*-Variante Evolutionärer Verfahren beim Fit an RV-Daten zu sein. Die Autoren merken an, dass “[...]GAs are still not very popular but they have been proven to be very useful for finding good starting points for the precise gradient methods of minimization like e.g. the well known Levenberg-Marquardt scheme”.

Symbol	Bedeutung
i, j, k	Indizes für Datenpunkte, Planeten und Parameter
N	Anzahl der Planeten
n	Anzahl der Datenpunkte
A	Anzahl der Parameter
f_{obj}	Zielfunktion des Minimierungsproblems
M^*	Masse des Zentralsterns
m_i	Masse des i -ten Planeten
$v_{\text{RB,rad}}$	Radialgeschwindigkeitsanteil der Raumbewegung des Sternes
σ_i	Messfehler des i -ten Datenpunktes
μ	Populationsgrösse
λ	aufgrund der μ Eltern werden λ Nachkommen erzeugt
x_k	k -ter (zu optimierender) Parameter
σ_k	Strategieparameter des k -ten Parameters. Neben den Messfehlern wurden auch die Strategieparameter, wie in der Literatur üblich mit σ bezeichnet. Die jeweilige Bedeutung geht aus dem Text hervor, wodurch Verwechslungen nahezu ausgeschlossen sind.

Tabelle 5.1: Definitionen.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass GAs vor allem bei komplizierten Mehrplanetensystemen Anwendung fanden, und zwar meist zur Suche von Startlösungen zur weiteren Optimierung mittels des Levenberg-Marquardt Verfahrens. Als GA-Implementationen kommen dabei, soweit den genannten Publikationen zu entnehmen ist, frei verfügbare Standard-Varianten von GAs mittels Binärcodierung der Parameter zum Einsatz. Wie schon in Abschnitt 4.3 angemerkt, ist eine binäre Kodierung kontinuierlicher Parameter oftmals unvorteilhaft, da *Hamming-Klippen* negative Eigenschaften auf die Konvergenz haben. Auch die alternative Repräsentation durch *Gray-Codes* führt bei kontinuierlichen Parametern oftmals zu Problemen. Im Allgemeinen sind Genetischen Operatoren (wie z.B. die Rekombination) bei kontinuierlicher Parameteroptimierung kaum problemspezifisch, weshalb hierbei meist Evolutionsstrategien der Vorzug gegeben wird. Obwohl ES in Bezug auf die Anwendung auf verschiedene Probleme weniger robust sind als GA, d.h. oftmals eine genaue Anpassung verschiedenster Parameter erfordern, besitzen sie meist erhebliche Vorteile bzgl. der Lösungsgüte und Konvergenzrate.

Im Folgenden wird die Anwendung von ES auf das Problem der RV-Fits beschrieben und untersucht, Vor- und Nachteile werden diskutiert. Es werden weiters Ansätze zur Einschränkung des Lösungsraumes beschrieben und die Kombination mit anderen bestehenden Verfahren beleuchtet.

5.2 Allgemeines

Der Algorithmus basiert auf einer (μ, λ) -ES mit Selbstadaptierung von Strategieparametern. Die einzelnen Bestandteile werden in den folgenden Abschnitten genauer erläutert, in diesem Abschnitt befinden sich einige Definitionen (Tab. 5.1) und allgemeine Erläuterungen.

Gleichung 2.42 wird verwendet, um die Radialgeschwindigkeit des Sternes eines Modellsystems (also eines Individuums) zu berechnen. Im Falle mehrerer Planeten summieren sich deren RV-Anteile gemäss Gleichung 2.43 zu einer gesamten RV, und die Periodenberechnung erfolgt gemäss Gleichung 2.26 mit $\mu_i = G \cdot (M + \sum_{j \leq i} m_j)$, wobei der Index i alle Planeten durchläuft.

σ_m	σ_ω	σ_a	σ_e	σ_{t_0}
m	2π	a	1	U

Tabelle 5.2: Zusammenhang der dimensionslosen Strategieparameter mit dem korrespondierenden Parameter.

Die physikalischen Vorgaben sind die Masse des Sterns M und die Anzahl N der Planeten.

Alle σ -Werte werden dimensionslos verwendet, der Zusammenhang zum jeweiligen Parameter ist in Tabelle 5.2 dargestellt. Die Parameter σ_ω und σ_e haben eine fixe Dimension, bei den verbleibenden Parametern wird die Größenordnung des aktuellen Parameterwertes berücksichtigt. Der Vorteil dessen tritt beim Parameter a besonders klar hervor. Je kleiner die Umlauffrequenz ist, umso mehr Oszillationen sind innerhalb des Datensamples enthalten. Die grosse Halbachse kurzperiodischer Planeten muss also wesentlich genauer bestimmt werden als jene von langperiodischen Planeten. Im Gegensatz dazu, sind bei langperiodischen Planeten wesentlich grössere Änderungen der grosse Halbachse notwendig um signifikante Änderungen des Zielfunktionswertes zu bewirken. σ_m könnte alternativ auch in Einheiten der maximal zulässigen Masse m_{\max} gewählt werden, jedoch hat sich die für den Parameter a beschriebene Vorgehensweise auch hierbei bewährt. σ_{t_0} wird jeweils in Einheiten der Umlaufperiode des Planeten gewählt, was eine gleichmässige Änderung der Phaseninformation für verschiedene Frequenzen bewirkt.

Als Anfangswert der Strategieparameter wird jeweils $\sigma_{\max}/2$ gewählt. In Tabelle 5.3 sind die Einschränkungen des Wertebereichs der Strategieparameter σ angegeben. Gemäss der erreichten Qualität des Fits werden die zulässigen Wertebereiche der Strategieparameter nach unten korrigiert. Diese Vorgehensweise verhindert am Beginn der Suche eine vorzeitige Konvergenz zu einem lokalen Optimum, und ermöglicht nach Erreichen einer bestimmten Qualität des Fits ein genaueres Durchsuchen der lokalen Umgebung. Insbesondere beim Parameter a muss zu Beginn der Suche verhindert werden, dass durch zu niedrige Werte von σ_a ein lokales Optimum nicht mehr verlassen werden kann. Werte von $\text{red.}\chi^2 < 5$ sind jedoch nur mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit mit schlecht bestimmten Werten des Parameters a erreichbar. Das Absenken der unteren Grenze des zulässigen Wertebereiches von σ_a ermöglicht dann eine effizientere Verbesserung der Lösung, da a bei niedrigen Werten von σ_a durch die Mutation nicht mehr nennenswert verschlechtert werden kann. Da die Adaptierung der Strategieparameter σ multiplikativ erfolgt, läuft deren Erhöhung bei sehr geringen Werten vergleichsweise langsam ab. Diese keinesfalls notwendige Vorgehensweise der Einschränkungen des Wertebereichs der Strategieparameter ermöglicht jedoch am Beginn der Suche ein schnelleres Verlassen eines lokalen Optimums.

Vor dem eigentlichen Beginn des Algorithmus muss von den Beobachtungszeitpunkten D der Wert $D_{\max} - D_{\min}$ abgezogen werden, damit der Nullpunkt in der Mitte der Datenpunkte liegt. Anderenfalls entstehen starke Oszillationen im Graphen der Zielfunktion, die daher rühren dass eine minimale Änderung der gefitteten Frequenz bei einem (auf der Zeitachse) weit entfernt liegenden Signal eine Verschiebung um eine oder mehrere Phasen bewirkt. Wird diesem Umstand nicht Rechnung getragen, sterben in der Population von Anfang an vielversprechende Individuen aus, und die Konvergenzeigenschaften sind stark beeinträchtigt.

σ	[min, max] red. $\chi^2 > 30$	[min, max] red. $\chi^2 \leq 30$	[min, max] red. $\chi^2 \leq 5$
m	[0.2, 0.7]	[0.2, 0.5]	[0.05, 0.4]
ω	[0.2, 0.7]	[0.2, 0.5]	[0.15, 0.4]
a	[0.2, 0.7]	[0.05, 0.5]	[0.005, 0.4]
e	[0.2, 0.7]	[0.05, 0.3]	[0.05, 0.3]
t_0	[0.2, 0.7]	[0.2, 0.5]	[0.15, 0.4]

Tabelle 5.3: Zugelassene Wertebereiche der Strategieparameter σ in Abhängigkeit von red. χ^2 der besten gefundenen Lösung.

5.3 Zielfunktion

Die Zielfunktion des Optimierungsproblem lautet

$$\min: \chi^2. \quad (5.1)$$

Bezeichnet man den Abstand des gefundenen Fits vom jeweiligen Messpunkt mit Δ und den Messfehler mit σ , so ist χ^2 definiert durch:

$$\chi^2 := \sum_{i=0}^n \left(\frac{\Delta_i}{\sigma_i} \right)^2. \quad (5.2)$$

Ein ‘‘guter’’ Fit ist dadurch charakterisiert, dass der Wert von χ^2 in der Nähe der Freiheitsgrade

$$df = n - \# \text{ Parameter} \quad (5.3)$$

liegt. Häufig verwendet man auch das *reduzierte* χ^2 :

$$\text{red. } \chi^2 := \chi^2 / df. \quad (5.4)$$

Werte nahe 1 bedeuten, dass es sich um einen guten Fit handelt, da die Kurve im Mittel bei nahezu allen Messpunkten innerhalb des Fehlerbalkens liegt. Ebenfalls wird in der Literatur häufig der *rms*-Wert der RV-Residuen angegeben, der wie folgt definiert ist:

$$rms = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta^2} \quad (5.5)$$

Abbildung 5.1 stellt das Relief (des negativen Logarithmus) der Zielfunktion $\chi^2(a_1, a_2)$ eines generierten Zweiplanetensystems (siehe Tab. 5.4) bei Variation der Parameter a_1 und a_2 dar. Die verbleibenden Parameter wurden auf die jeweils richtigen Werte gesetzt. Man erkennt das spitze Optimum und die multimodalen Strukturen des Funktionsreliefs. In Abbildung 5.2 ist der Funktionsgraph der Zielfunktion bei der Variation jeweils eines Parameters bei einem Planeten dargestellt, die anderen Parameter wurden auf die richtigen Werte gesetzt. Bei der Variation von e ergibt sich (genauso wie bei den Parametern ω , m und t_0) eine unimodale Funktion. Bei der Variation von a ergibt sich ein komplizierterer Funktionsgraph, sobald der Parameterwert in die Nähe der Frequenz des anderen Planeten kommt. In Abbildung 5.1 ist das Funktionsrelief bei der Variation der Parameter a_1 und a_2 dargestellt. Sind die Messpunkte über eine große Anzahl

Planet	$m \cdot \sin i [M_{\oplus}]$	$\omega [^{\circ}]$	$a [\text{AE}]$	e	$t_0 [d]$
1	200	100	1.5	0.18	0
2	150	60	2.2	0.38	0

Tabelle 5.4: Testplanetensystem.

an Umläufen des Planeten verteilt, entsteht ein wesentlich stärker oszillierender Funktionsgraph, mit stärker ausgeprägten lokalen Minima. Bezüglich aller Parameter ergibt sich ein stark multimodales Funktionsrelief der Zielfunktion. Kleine Abweichungen der Parameterwerte an der Stelle eines lokalen Optimums bewirken meist eine große Erhöhung des Wertes der Zielfunktion. Insbesondere die Kombination der Parameter ω und t_0 , welche die Phaseninformation bestimmt, erfordert eine genaue Abstimmung. Ebenso führen geringste Abweichungen des Parameters a von einem lokalen Optimum zu einer starken Erhöhung von χ^2 .

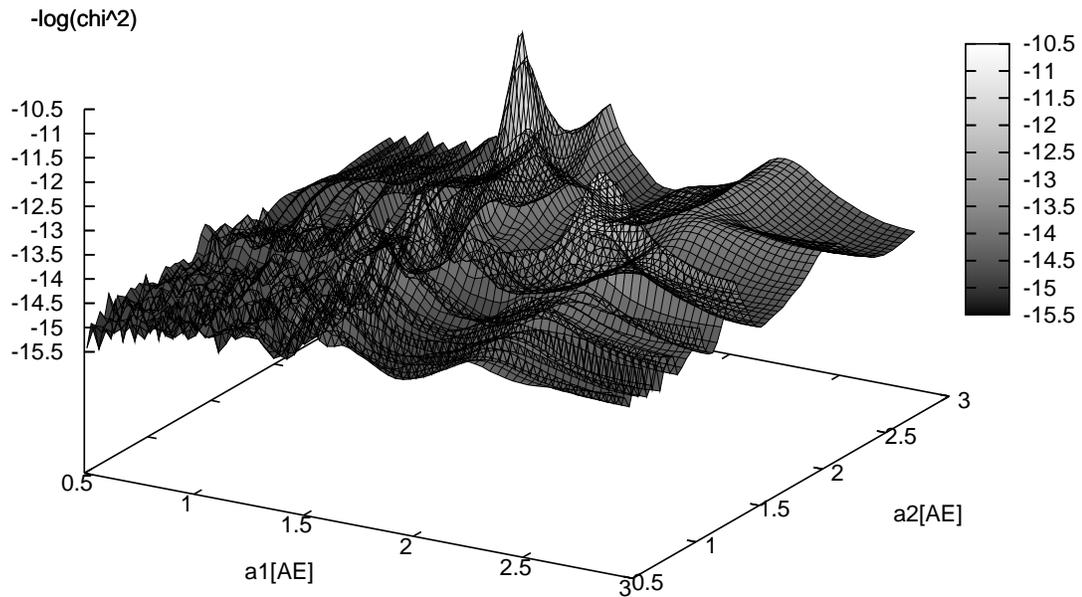


Abbildung 5.1: $\log \chi^2$ Surfaceplot bei Variation der Parameter a_1 und a_2 .

5.4 Kodierung

Zu jedem Planeten werden die orbitalen Parameter $m \cdot \sin i$, ω , a , e und t_0 bestimmt. Prinzipiell ist es möglich, dass der beobachtete Stern neben der durch Planeten verursachten RV-Variation eine,

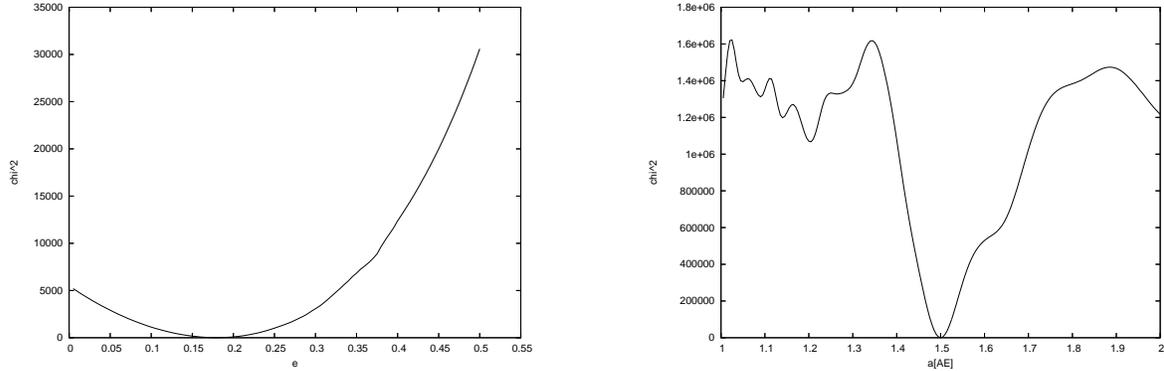


Abbildung 5.2: Graph der Zielfunktion bei Variation jeweils eines Parameters bei einem Planeten in einem 2-Planeten-System. Der linke Plot stellt den Funktionsgraph bei der Variation des Parameters e dar, der rechte Plot jenen bei der Variation von a .

durch seine Raumbewegung verursachte Radialgeschwindigkeit besitzt. Da nicht bekannt ist, wie die Messdaten über die Orbits der Planeten verteilt sind, führt das Abziehen des Mittelwertes der Daten nicht notwendigerweise zum korrekten Radialgeschwindigkeitsanteil der Raumbewegung. Dieser ist somit nicht trivial bestimmbar, wodurch sich ein weiterer zu bestimmender Parameter $v_{RB,rad}$ ergibt. Insgesamt ergeben sich dadurch bei N Planeten $A = N \cdot 5 + 1$ zu bestimmende Parameter.

Zu jedem dieser Parameter x_k wird ein Strategieparameter σ_k mitgeführt, und wie in Abschnitt 4.2.2 beschrieben angepasst. Die Verwendung einer korrelierten Mutation mit Rotationswinkeln $\alpha_{j,k}$ führte zu keinen nennenswerten Verbesserungen, weshalb schliesslich aus Performancegründen auf deren Verwendung verzichtet wurde, womit $\vec{a} = (\vec{x}, \vec{\sigma})$.

Fasst man die Parameter in jeweils einem Planeten zuordenbaren Gruppen $\hat{x} = (m \cdot \sin i, \omega, a, e, t_0)$ zusammen, so werden diese stets derart geordnet, sodass $a_1 < a_2 < \dots < a_N$. Nach jedem Mutation- bzw. Rekombinationsschritt wird für jedes Individuum sichergestellt, dass diese Ordnung erhalten ist.

5.5 Mutation

Bei der klassischen Variante der Mutation der (μ, λ) -ES (siehe 4.2.2) werden alle Parameter x_k mutiert, bevor der neue Fitnesswert eines Individuums berechnet wird. In diesem Fall erweist es sich jedoch als vorteilhaft, in einem Mutationsschritt nur bestimmte Teilmengen der Parameter zu mutieren. Diese Teilmengen bestehen aus den zu einem Planeten zugehörigen Parametern \hat{x} . Ein Planet stellt somit ein natürliches Subsystem dar, welches sich im Laufe der Evolution teilweise separat im Gesamtorganismus entwickeln kann.

Bei der Mutation des Parameters ω muss berücksichtigt werden, dass der aktuelle Wert t_0 , der ja die Phaseninformation beinhaltet, entsprechend abgeändert werden muss, sodass die ursprüngliche Phase beibehalten wird. Wird ω um den Winkel ϕ geändert, wird t_0 folgendermassen angepasst:

$$t_0' = t_0 + U \cdot \frac{\phi}{2\pi} \quad (5.6)$$

U bezeichnet dabei die (durch a festgelegte) Umlaufperiode des Planeten. Ohne dieser Vorgehensweise würde die Mutation von ω eine sukzessive Anpassung der Perihelzeit behindern. Ebenso wird t_0 bei Änderungen von a abgeändert. Das ermöglicht vor allem die effiziente Anpassung

Parameter	Wertebereich	Bemerkung	Behandlung
m	$m_{\min} < m < m_{\max}$	m_{\min} Konstante, m_{\max} durch maximale RV-Amplitude bestimmt.	$m < m_{\min} \rightarrow m = m_{\min}$ $m > m_{\max} \rightarrow m = m_{\max}$
ω	$0 < \omega < 2\pi$		$\omega = \omega \bmod 2\pi$
a	$a_{\min} \leq a_{j+1} \leq a_{\max}$	siehe Abschnitte 5.5 u. 5.5.1	
e	$0 \leq e \leq 1$		$e < 0 \rightarrow e = 0$ $e \geq 1 \rightarrow e = 1$
t_0	$0 \leq t_0 \leq U$	U ...Periode des Planeten	$t_0 = t_0 \bmod P$

Tabelle 5.5: Einschränkungen der Parameterwerte

von langperiodischen Planeten in Mehrplanenensystemen. Ist die Periode eines solchen Planeten falsch bestimmt, würde die Änderung von a auf einen besseren Wert zunächst zu Erhöhungen des Zielfunktionswertes führen, da sich die Änderung nicht symmetrisch zum Nullpunkt (dem Zeitpunkt in der Mitte des Datensamples) auswirkt. Deshalb erweist sich eine Abänderung

$$t_0' = t_0 + 1/2 \cdot (U_{\text{alt}} - U_{\text{neu}}) \quad (5.7)$$

als vorteilhaft.

Um sicherzustellen, dass keiner der Parameter den vorgegebenen Wertebereich verlässt, müssen einige Modifikationen am Mutationsoperator der (μ, λ) -ES vorgenommen werden. Die Einschränkungen der einzelnen Parameter ist in Tabelle 5.5 dargestellt. Die in der ersten Zeile der Tabelle 5.5 angeführte Konstante muss vom Benutzer festgelegt werden und ist vor allem durch die Genauigkeit der Beobachtungsdaten nach unten beschränkt. Die Konstante m_{\max} wird entsprechend der Daten festgelegt, indem die maximale Masse *eines* Planeten bestimmt wird, der für die RV-Variation verantwortlich sein kann.

5.5.1 Einschränkung des Lösungsraumes

Um die Konvergenzeigenschaften des Algorithmus zu verbessern, kann der Lösungsraum dadurch erheblich eingeschränkt werden, dass physikalisch unzulässige bzw. extrem unwahrscheinliche Lösungen a priori ausgeschlossen werden. Da es extrem unwahrscheinlich ist, Systeme zu beobachten, die auf Zeitskalen von wenigen hundert Jahren instabil sind, dahingehend, dass Planeten aus dem System geworfen würden, sind derartige Lösungen physikalisch kaum sinnvoll. Stark wechselwirkende Systeme erfordern eine genauere Betrachtung mittels numerischer Integration, für welche jedoch zunächst Anfangswerte für die Bahnelemente gefunden werden müssen. In den meisten Fällen stellt der Fit mittels Kepler-Orbits einen ausreichend guten Ansatz dar, diese oskulierenden Bahnelemente zu finden. Das verwendete Hill-Stabilitätskriterium (Abschnitt 3.4) stellt diesbezüglich keine Einschränkung dar, da es durch den Faktor ζ in Gleichung 3.2 entsprechend parametrisiert werden kann. Die Verwendung dieses Stabilitätskriteriums erfordert einige Änderungen des Mutationsoperators bzgl. der großen Halbachse a . Die Mutation wird parametrisiert durch:

$$\Theta_m = \{a^-, \tilde{r}_H^-, a^+, \tilde{r}_H^+\}. \quad (5.8)$$

a^- bezeichnet dabei die große Halbachse des nächsten inneren Planeten, und ist a_{\min} sofern es sich um den innersten Planeten handelt. Analog ist a^+ die große Halbachse des nächsten äußeren Planeten, und ist a_{\max} sofern es sich um den äußersten Planeten handelt. \tilde{r}_H^- und \tilde{r}_H^+ bezeichnen

jeweils die Hill-Radien r_H der benachbarten Planeten, multipliziert mit einem Faktor ζ (siehe 3.1 und 3.2), der einen weiteren Strategieparameter darstellt. Werte von $\zeta = 5$ sind physikalisch plausibel und erweisen sich in nahezu allen Fällen als günstig. Geringere Werte erhöhen das Spektrum möglicher Lösungskandidaten, höhere Werte verringern diese aber garantieren Stabilität über längere Zeitskalen. \tilde{r}_H bezeichnet analog den mit ζ multiplizierten Hill-Radius des zu mutierenden Planeten. Die Mutation des Parameters a_j wird mit Hilfe der temporären Variable η wie folgt durchgeführt:

$$\eta = N_j(0, \sigma_j) \quad (5.9)$$

$$a'_j = \begin{cases} a_j + \eta & \text{wenn } a_j + \tilde{r}_H + \eta < a^+ - \tilde{r}_H^+ \text{ und } a_j - \tilde{r}_H + \eta > a^- + \tilde{r}_H^- \\ a_j & \text{wenn } a_j + \eta < a^+ - \tilde{r}_H^+ \text{ und } a_j + \eta > a^- + \tilde{r}_H^- \\ a_j + \eta + 2 \cdot \tilde{r}_H^+ & \text{jedoch } a_j + \tilde{r}_H + \eta > a^+ - \tilde{r}_H^+ \text{ und } a_j - \tilde{r}_H + \eta < a^- + \tilde{r}_H^- \\ a_j + \eta - 2 \cdot \tilde{r}_H^- & \text{wenn } a_j + \eta > a^+ - \tilde{r}_H^+ \\ & \text{wenn } a_j + \eta < a^- + \tilde{r}_H^- \end{cases} \quad (5.10)$$

Es wird also zunächst mittels Normalverteilung ein Wert für η bestimmt. Für den Fall, dass die Summe $a_j + \tilde{R}_H + \eta$ innerhalb des Bereiches $a^- + \tilde{r}_H^-$ und $a^+ - \tilde{r}_H^+$ liegt, ist das Hill-Stabilitätskriterium *nicht* verletzt, und es ergibt sich kein Unterschied zur normalen Mutation. Kommt es zu einem Überlapp der Hill-Sphären (Fall 2 in Gleichung 5.10), wird die Mutation nicht durchgeführt und der ursprüngliche Wert beibehalten. Führt die Addition von η zu a_j jedoch dazu, dass a'_j selbst innerhalb des, einen benachbarten Orbit umschliessenden Torus mit Radius $\tilde{r}_H^{+/-}$ liegen würde, wird das zweifache des Wertes $\tilde{r}_H^{+/-}$ addiert, bzw. subtrahiert. Das hat zur Folge, dass der “verbotene Bereich” in beiden Richtungen übersprungen wird, und somit ein bestimmter Planet durch die Mutation mit einem seiner Nachbarn die Position tauschen kann. Diese Vorgehensweise ist vor allem in folgenden Situationen sinnvoll: Angenommen, es sind in einem 3-Planeten-System die Planeten 2 und 3 bereits gut bestimmt, befinden sich jedoch an den Positionen 1 und 3. Die beschriebene Vorgehensweise ermöglicht es, dass der Planet an Stelle 2 mit dem Planeten an Stelle 1 Platz tauscht, sobald die Mutation von a eine Verletzung des Hill-Kriteriums in diese Richtung bewirken würde. Somit befinden sich sowohl der noch schlecht bestimmte Planet 1, als auch der Planet 2 an der richtigen Position, jedoch sind die Parameterwerte des Planeten 1 (vor allem die zunächst besonders wichtigen Parameter a und m) natürlich noch nicht besonders gut bestimmt. Zunächst wird eine Anpassung der Masse m vorgenommen, sodass die Hillsphäre dieses Planeten nicht mit jenen der benachbarten Planeten überlappt. Ausgehend von dieser Situation ist jedoch nicht unbedingt zu erwarten, dass die neu entstandene Lösung besser ist als die des ursprünglichen Individuums, da sich letzteres durch den vorangegangenen Evolutionsprozess schon in einem, bzw. nahe eines lokalen Optimums befand. Die Durchführung einiger Mutationen führt jedoch im Falle, dass tatsächlich die fehlende Position besetzt wurde, mit hoher Wahrscheinlichkeit zu einer stark verbesserten Lösung. Deshalb wird ein neuer Parameter κ eingeführt, welcher die minimale Lebensdauer des Individuums, bzw. der entstandenen Nachkommen festlegt. Im Normalfall ist $\kappa = 0$, da bei der (μ, λ) -ES jedes Individuum nur eine Generation überlebt. In diesem Fall jedoch wird κ auf einen Wert ungleich Null gesetzt, um die Anpassung des Planeten an der neuen Position zu ermöglichen. Ein Individuum mit $\kappa \neq 0$ wird zwar nicht selbst in die nächste Generation übernommen, jedoch dessen Nachkommen mit einem um Eins verringerten Wert von κ . Eine genaue Beschreibung zur Vorgehensweise mit Individuen mit $\kappa \neq 0$ bezüglich der Selektion befindet sich in Abschnitt 5.7.

Ein weiterer ähnlicher Mechanismus ist, den zu mutierenden Planeten mit geringer Wahrscheinlichkeit p_d zu zerstören, und einen zufällig neu generierten Planeten in die Mitte zweier beliebiger Hill-Sphären zu setzen, wobei die Masse derart festgelegt wird, dass die Hill-Sphäre des neuen Planeten die Hälfte des Bereiches zwischen den Hill-Sphären der umgebenden Planeten überdeckt. Wurde der neue Planet an innerster bzw. äußerster Stelle erstellt, fungieren a_{\min}

bzw. a_{\max} anstelle des Randes der jeweiligen Hill-Sphäre als begrenzende Werte.

Die Mutation der Masse m erfordert eine weitere Modifikation des Mutationsoperators. Wird durch die Mutation eine Masse erreicht, die den Hill-Radius derart vergrößert, dass er mit jenen der benachbarten Planeten überlappt, wird der ursprüngliche Wert der Masse beibehalten.

$$\eta = N_j(0, \sigma_j) \quad (5.11)$$

$$m'_j = \begin{cases} m_j + \eta & \text{wenn } a_j + \tilde{r}_H(m_j) < +\eta < a^+ - \tilde{r}_H^+ \text{ und } a_j - \tilde{r}_H > a^- + \tilde{r}_H^- \\ m_j & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.12)$$

Diese abgeänderte Variante der Mutation, im weiteren auch als *Hill-Mutation* bezeichnet, stellt einen wesentlichen Eingriff in die klassische Mutation der (μ, λ) -ES dar. Die Motivation für diese Vorgehensweise begründet sich vor allem aufgrund von zwei Aspekten. Erstens stellen Individuen, welche das Hill-Kriterium verletzen keine gültigen, bzw. erwünschten Lösungen dar. Diese müssen also auf jeden Fall davon ausgeschlossen werden als beste Gesamtlösung aufgenommen werden zu können. Dadurch kann jedoch die Situation entstehen, dass sich ungültige Lösungen mit geringerem Zielfunktionswert in der Population stark vermehren und deshalb nur mehr zu wenige gültige Lösungen produziert werden. Wird dann tatsächlich die Nachbarschaft des globalen Optimums erreicht, ist jedoch zu erwarten, dass dieses Individuum aufgrund der noch nicht ausreichend genauen Anpassung der Parameter nicht sofort einen derartig niedrigen Zielfunktionswert erreicht, wie die in der Population vorhandenen ungültigen Lösungen. Somit können sich gültige Lösungen nur unzureichend gegen ungültige behaupten, wenn man letztere in der Population zulässt.

Ein weiterer Grund für die Verwendung der Hill-Mutation ist die Beobachtung, dass ohne deren Verwendung häufig Individuen mit zwei Planeten auf nahezu koorbitalen Bahnen entstehen, wobei diese koorbitalen Planeten die Eigenschaften lediglich eines realen Planeten beschreiben. Wiederum entsteht das Problem, dass sich etwaig entstandene "bessere" Lösungen nicht gegen diese lokal schon gut angepassten aber ungültigen Lösungen behaupten können.

Durchgeführte Tests bei Mehrplanetensystemen zeigen, dass oftmals erst die Hill-Mutation die korrekte Erkennung des globalen Optimums ermöglicht. Parameterwerte von $\kappa = 3$ und $p_d = \mu/\lambda$ haben sich dabei als günstig erwiesen. Eine genauere Analyse der Unterschiede der beiden Mutationsvarianten befindet sich in Abschnitt 5.8.

5.6 Rekombination

Zwei verschiedene Rekombinationen kommen in der ES zur Anwendung. Die erste Variante (RI) bezieht sich auf die Rekombination der Strategieparameter σ_k . Laut [Sch81] ist die Rekombination der Strategieparameter eine notwendige Voraussetzung für eine gut funktionierende Selbstadaptierung, und bewirkt eine Beschleunigung des Suchprozesses. Konkret wurde die globale Variante der *intermediate Recombination* gewählt, bei welcher die Strategieparameter des neuen Individuums folgendermassen bestimmt werden:

$$\sigma'_k = u_k \sigma_{a,k} + (1 - u_k) \sigma_{b_i,k} \quad (5.13)$$

$\sigma_{a,k}$ bezeichnet den k -ten Strategieparameter des Individuums für welches die Rekombination durchgeführt werden soll. Jeder solcher Parameter wird mit dem korrespondierenden Parameter $\sigma_{b_i,k}$ eines für jeden Parameter zufällig neu gewählten Individuums \vec{a}_{b_i} rekombiniert. u_k ist eine Zufallsvariable, $u_k \in [0, 1]$.

Die "klassische" Rekombination der Parameter erscheint in diesem Zusammenhang wenig sinnvoll, was durch experimentelle Tests bestätigt wird.

Dartüberhinaus wird eine problemspezifische Variante der Rekombination verwendet (RII). Diese Rekombination findet ausschliesslich bei Mehrplanetensystemen Anwendung. Ein häufiges Problem bei Mehrplanetensystemen ist, dass einige der Planeten schon korrekt erkannt sind, sich diese aber auf falschen Positionen befinden. Des weiteren enthalten verschiedene Individuen verschiedenste möglicherweise schon gut angepasste Planeten. Diese Tatsache legt es nahe, neue Planetensysteme mit Planeten unterschiedlicher Systeme zu erzeugen. Dazu wird für jede zu besetzende Position ein Planetensystem und darin ein Planet zufallsgesteuert ausgewählt. Der Parameter $v_{\text{RB,rad}}$ wird von der bis dato besten gefundenen Lösung übernommen.

Für 1/10 aller von einem Individuum erzeugten Nachkommen aus der Population P wird die Rekombination (RII) durchgeführt, und das entstandene Individuum direkt in P'' übernommen. Auf die Mutation wird in diesem Fall verzichtet, da die Hauptaufgabe der Rekombination (RII) lediglich das Zusammenführen schon gut bestimmter Planeten ist. In allen anderen Fällen wird die Rekombination (RI) für jedes Individuum vor der Mutation durchgeführt. Eine Analyse der beiden Rekombinationsvarianten befindet sich in Abschnitt 5.8.

5.7 Selektion

Bezüglich der Selektion ergeben sich zwei Modifikationen zur klassischen in Abschnitt 4.2.1 beschriebenen (μ, λ) -Selektion. Die Verwendung von *Elitismus* hat sich insbesondere zur Verbesserungen in der Nachbarschaft des globalen Optimums bewährt. Wenn innerhalb der letzten t_e Zeitschritte keine Verbesserung erzielt wurde, wird die bisher beste gefundene Lösung erneut in die Population aufgenommen, um ausgehend davon möglicherweise weitere Verbesserungen erzielen zu können. Für t_e haben sich experimentell Werte ≈ 10 als günstig herausgestellt.

Eine weitere Abänderung der klassischen (μ, λ) -Selektion wird durch die in in 5.5.1 beschriebene gelegentliche Verwendung einer minimalen Lebensdauer κ eines Individuums notwendig. $\lfloor \mu/3 \rfloor$ der Population wird für derartige Fälle reserviert. Im Zuge der Selektion werden zunächst die $\mu - \lfloor \mu/3 \rfloor$ besten Individuen ohne weitere Einschränkungen übernommen. In die verbleibenden Plätze werden sukzessive die $\lfloor \mu/3 \rfloor / \kappa_{\text{max}}$ besten Individuen mit der minimalen verbleibenden Lebensdauer $\kappa_i = i$ aufgenommen, wobei $i = 1.. \kappa_{\text{max}}$.

5.8 Analyse

In Abbildung 5.3 werden die Konvergenzraten verschiedener Einstellungen der Parameter μ und λ im Vergleich mit der (15,100)-ES gegenübergestellt. Dabei wurde wiederum das Testsystem gemäss Tab. 5.4 verwendet. Eine Erhöhung von λ bei gleich belassenem μ bringt zwar anfangs schnellere Konvergenz, schliesslich aber kein besseres Ergebnis. Die (50,750)-ES liefert jedoch signifikant bessere Ergebnisse als die (15,100)-ES. Auch bei weitaus höheren Werten von λ bringen grössere Werte von μ keine weiteren Verbesserungen. Diese Beobachtung ist konsistent mit den in [BFM97], B2.4 für das *Sphere-Model* angegebenen Einstellregeln für μ und λ , in Abhängigkeit von der Dimensionalität des Problems. Bei einer sehr hohen Anzahl an Planeten (≈ 10) könnten sich auch höhere Populationsgrössen μ als vorteilhaft erweisen, jedoch wurden diesbezüglich keine Tests durchgeführt.

Bei typischen 1-Planetensystemen können mit einer (15,500)-ES durchaus gute Ergebnisse erzielt werden, das Optimum wird meist erreicht. Bei komplexeren Systemen sind jedoch grössere Populationen und eine wesentlich höhere Anzahl an erzeugter Nachkommen vorteilhaft. Werte von $\mu \geq 50$ und $\lambda \geq 5000$ haben sich hierbei bewährt.

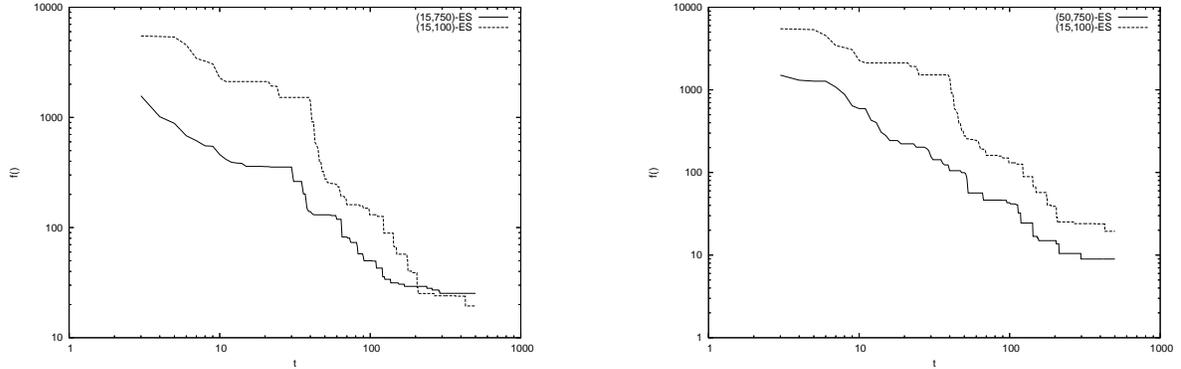


Abbildung 5.3: Vergleich der Konvergenzrate der (15,100)-ES mit der (15,750)-ES (links) und (15,100)-ES mit der (50,750)-ES (rechts), jeweils 500 Iterationen. Der Funktionsgraph entspricht dem Wert der Zielfunktion red. χ^2 . Bei den Durchläufen wurde weder die Rekombination noch die Hill-Mutation verwendet. Als Datensatz kam das gemäss den Parameterwerten aus Tab. 5.4 generierte 2-Planeten-System zur Anwendung.

5.8.1 Mutation

Um den positiven Effekt der Hill-Mutation zu belegen, wurden qualitative Tests mit verschiedensten Mehrplaneten-Systemen, und statistische Tests an einem realen 3-Planeten-System (55 Cnc) mit der (15, 500)-ES mit jeweils 300 Iterationsschritten durchgeführt. Mit diesen Parametereinstellungen konnten zwar keine hochwertigen Ergebnisse erzielt werden, jedoch die Nachbarschaft des globalen Optimums in vielen Fällen erreicht werden. Zur Durchführung des t-Tests wurde das Statistikpaket *R* herangezogen, welches eine Implementierung des *Welch Two-Sample t-tests* enthält.

Als Mittelwerte von jeweils 10 Durchläufen ergaben sich für red. $\chi^2 \approx 35$ im Falle ohne der Hill-Mutation und ≈ 16 im Falle mit der Hill-Mutation. Der statistische *t*-Test für Normalverteilungen mit unterschiedlichen Varianzen ergab einen p-Wert von 0.04, wodurch die Nullhypothese von gleichen Mittelwerten zu einem Signifikanzniveau von 99.5% eindeutig verworfen werden konnte. Die Hill-Mutation bewirkt somit eine statistisch stark signifikante Verbesserung im Gegensatz zur normalen Mutation.

Abbildung 5.4 stellt die Durchsuchung des Parameterraumes der Parameter a und m für das in Tabelle 5.3 angegebene Testsystem dar. Man erkennt deutlich die durch die Hill-Mutation entstehende Einschränkung der Wertebereiche der jeweiligen Parameter, insbesondere der grossen Halbachsen a . Bereiche physikalisch zulässiger Lösungen werden dadurch erheblich genauer durchsucht, wodurch die Population schneller in Richtung einer physikalisch korrekten und guten Lösung getrieben wird.

5.8.2 Rekombination

Statistische Analysen mittels t-Test ergaben keinen statistisch signifikanten Unterschied der Mittelwerte von jeweils 10 Durchläufen mit Rekombination RI und ohne deren Verwendung. Der Mittelwert des Zielfunktionswertes der Durchläufe mittels RI war jedoch etwas niedriger (≈ 30), und die Streuung lag mit $\sigma \approx 10$ ebenfalls unter dem Wert von $\sigma \approx 17$ ohne Verwendung von RI. Insbesondere deshalb erscheint deren Verwendung durchaus nützlich, da die Qualität der Lösungen weniger variiert.

Die Rekombination RII ergab einen statistisch schwach signifikant niedrigeren Mittelwert \approx

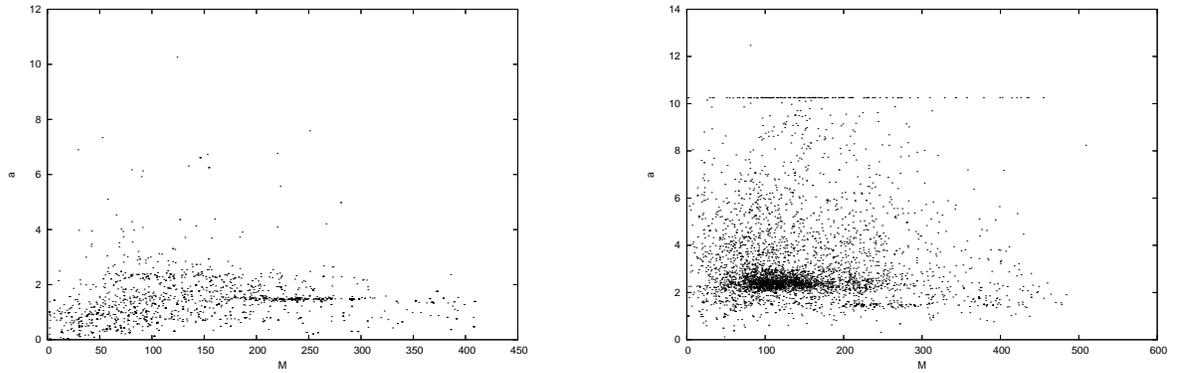


Abbildung 5.4: Plot der Durchsuchung des Parameterraumes für die Parameter a und m . Die linke Grafik stellt bezieht sich auf den ersten Planeten, die rechte auf den zweiten.

20. Der p -Wert ergab 0.11, wodurch die Nullhypothese von Verteilungen mit gleichem Mittelwert mit einer (relativ hohen) Fehlerwahrscheinlichkeit von $\approx 10\%$ verworfen werden kann.

Kapitel 6

Implementierung

Abstraction is selective ignorance.
Andrew Koenig

Nach den bisherigen theoretischen Erläuterungen bietet dieses Kapitel einen kurzen Überblick über die Implementierung der in Kapitel 5 beschriebenen ES. Die erzielten Resultate werden in den folgenden beiden Kapiteln präsentiert.

6.1 Programmiersprache

Die Anforderungen an die Programmiersprache waren 1) Portabilität und 2) Objektorientierung, weshalb die Wahl, nach einiger Erwägung von *C++* und *Ada* auf *Java* fiel. Von Anfang an war zu erwarten, dass die Performance eine kritische Rolle spielen würde, weshalb die Auslagerung einiger kritischer Teile in schnellere Umgebungen (z.B. *Fortran*) in Erwägung gezogen wurde. Eine genauere Recherche zeigte dann jedoch, dass *Java* nicht so langsam ist, wie oftmals angenommen [LN04]. Benchmarks mit typischen wissenschaftlichen Rechnungen und verschiedenen *Virtuellen Maschinen* unter verschiedenen Betriebssystemen zeigten sogar, dass der Java-Code bezüglich vergleichbarem C-Code in Punkto Laufzeit annähernd äquivalent ist und nur um geringe Faktoren langsamer als Fortran-Code ([BSPF00]). Selbst durchgeführte Tests ergaben, dass in Bezug auf diese Anwendung die Laufzeitunterschiede auf verschiedenen Virtuellen Maschinen nahezu vernachlässigbar sind.

Die Tests und Rechnungen wurden auf einem Rechner mit einem 2.8 GHz Pentium 4 Prozessor und 1GB RAM unter *Gentoo Linux* durchgeführt. Als Compiler und Laufzeitumgebung wurde die *Java 2 Standard Edition, Blackdown* Version 1.4.2-03 verwendet.

6.2 Datenstrukturen

Beim Problem der Erkennung von Planetensystemen ist es nicht ausreichend, Individuen lediglich als Vektor \vec{x} zu repräsentieren, da unter anderem die Anzahl der Planeten prinzipiell variabel ist. Als Individuum wird deshalb das Objekt `PlanetarySystem` verwendet, welches Instanzen der Klasse `Planet` enthält (Abb. 6.1). Die Anzahl an `Planet`en, die `PlanetarySystem` enthält, wird als Parameter vor dem Programmstart festgelegt.

Neben den `Planet`-Instanzen enthält die Klasse `PlanetarySystem` die Masse des Zentralsterns, und die Standardabweichung, welche vom Algorithmus, in der in Abschnitt 5 beschriebenen Weise, als Strategieparameter verwendet wird. Auch der Radialgeschwindigkeitsanteil der Raumbewegung des Systems ist als Parameter in dieser Klasse enthalten. Darüber hinaus enthält diese Klasse Methoden zur Berechnung der Radialgeschwindigkeiten (die eigentliche Berechnung erfolgt mittels der Klasse `RadialVelocityCalculator`) und Mutation, wobei bei letzterer ebenfalls die Mutations-Methoden aller enthaltenen Planeten aufgerufen werden. Eine Methode zur zufälligen Generierung eines Planetensystems ist ebenfalls in `PlanetarySystem` enthalten.

Die Klasse `Planet` enthält alle die einzelnen Planeten eines Systems betreffenden Eigenschaften und Parameter. Das sind insbesondere die Bahnelemente mit den zugehörigen Streuungen. Analog zu `PlanetarySystem` sind Methoden zur Mutation und Zufallserzeugung enthalten.

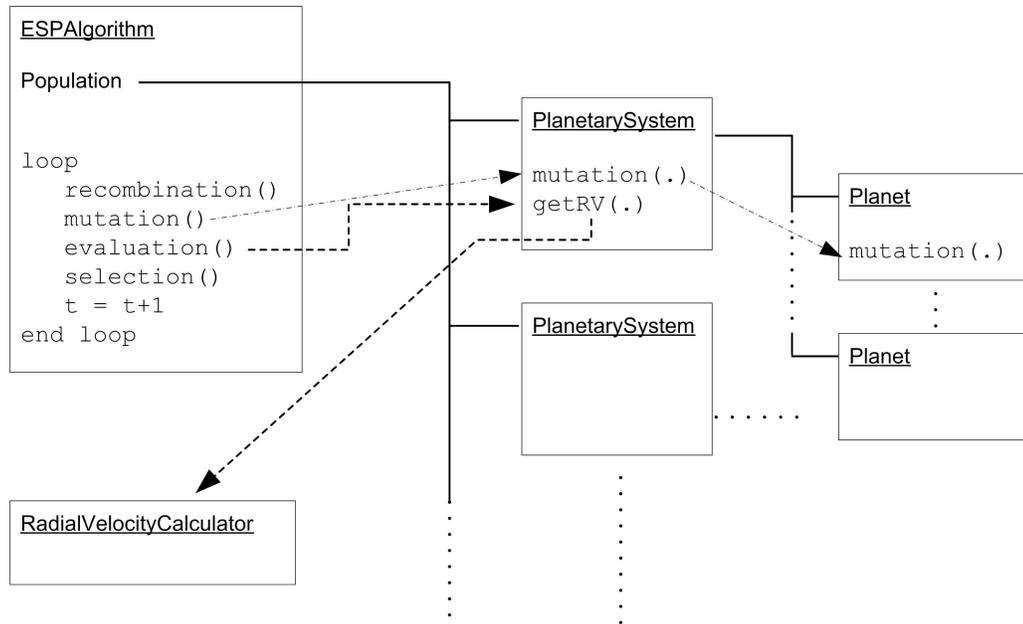


Abbildung 6.1: Grobe Darstellung der Datenstruktur und Objekte

6.3 Hauptprogramm

Der Algorithmus selbst ist in der Klasse `ESPAlgorithm` implementiert. Die Beobachtungsdaten werden mittels 3 *Arrays* an den Konstruktor der Klasse übergeben. Zwecks Interaktion mit der grafischen Benutzeroberfläche ist die Klasse von `Thread` abgeleitet. Die wesentlichen Bestandteile von `ESPAlgorithm` sind ein Vektor, der die Population enthält, eine Variable vom Typ `PlanetarySystem`, welche die beste gefundene Lösung speichert und jeweils eine Methode für die grundlegenden Operationen des Evolutionären Algorithmus (Mutation, Rekombination, Bewertung, Selektion). Des weiteren existiert eine Methode, welche die (diskretisierte) Radialgeschwindigkeitskurve der besten gefundene Lösung in eine Datei schreibt, und ein Shellskript zur Erzeugung des Plots aufruft. Zur Darstellung des Plots in der grafischen Benutzeroberfläche wird die Evaluierungsversion des *java-beans* `jPDFViewer` von *Qoppa Software* verwendet.

Die Parameter für den Programmablauf (Populationsgrösse, Mutationsrate, optionale Rekombination, lokale Suche, Eingabedatei, Anzahl der Planeten, etc.) werden mittels eines *Propertyfiles* festgelegt. In diesem können auch σ -Anfangswerte für die Mutation und die Masse des Zentralsterns festgelegt werden und optional die Werte bestimmter Bahnelemente fixiert werden. Tabelle 6.1 enthält eine Übersicht über die wichtigsten Parameter des Propertyfiles. Das Programm selbst kann entweder direkt von der Konsole gestartet, oder über ein grafisches Userinterface (Abb. 6.2, 6.3) gesteuert werden, welches eine komfortable Einstellung der Parameter und eine übersichtliche Darstellung des Programmstatus bietet. Der Programmstart von der Konsole erfolgt mittels den Befehlen `java ESPStart` bzw. `java ESPApp`.

6.3.1 Eingabedatei

Die Eingabedatei enthält die Zeitpunkte der Beobachtungen in Form eines Julianischen Datums, also einer reellen Zahl. Zu jedem Datum wird des weiteren der Messwert und der Messfehler als reelle Zahlen in der Einheit m/s angegeben. Im Falle fehlender Messfehler, bzw. Werte gleich 0, wird vom Programm automatisch der Fehler 0.1m/s gewählt, um Fehler bei der, für die

Property	Symbol	Typ	Beschreibung
inputfile		String	Filename
MS	M_{\odot}	double	Masse des Zentralsterns (in Sonnenmassen)
mu	μ	int	Populationsgrösse
lm	λ/μ	int	Mutationsrate
iterations		int	Vorgegebene Iterationsanzahl
rec		boolean	Rekombination (Typ II) verwendet
LS		int	Iterationen für Lokale Suche
elitism		boolean	Elitismus verwenden
hill		boolean	Hill-Kriterium bei Mutation und Rekombination berücksichtigen
circular		boolean	Sinusfit statt Keplerfit
kappa	κ_{\max}	int	Maximale Lebensdauer (gemäß Beschreibung in Abschnitt 5.5.1)
zeta	ζ	double	Stabilitätsfaktor für Hill Mutation (gemäß Beschreibung in Abschnitt 5.5.1)
f_tau		double	Proportionalitätsfaktor für Berechnung von τ
f_tau_0		double	Proportionalitätsfaktor für Berechnung von τ_0
MIN_M	m_{\min}	double	Minimale Masse eines Planeten
MIN_a	a_{\max}	double	Minimaler Wert der großen Halbachse eines Planeten
sigma_M	σ_m	double	Anfangswert für den Strategieparameter σ_m
sigma_omega	σ_{ω}	double	Anfangswert für den Strategieparameter σ_{ω}
sigma_a	σ_a	double	Anfangswert für den Strategieparameter σ_a
sigma_e	σ_e	double	Anfangswert für den Strategieparameter σ_e
sigma_t_0	σ_{t_0}	double	Anfangswert für den Strategieparameter σ_{t_0}

Tabelle 6.1: Elemente des Propertyfiles

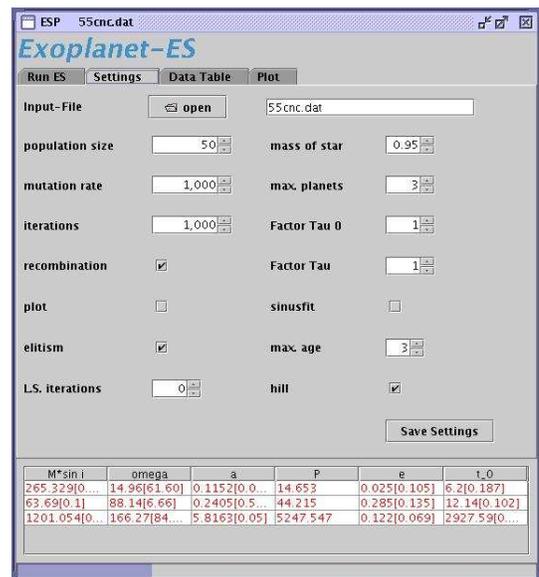
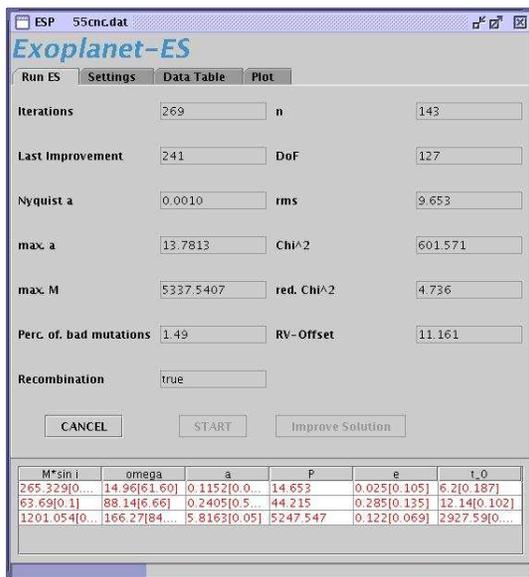


Abbildung 6.2: Screenshots des Userinterfaces (1).

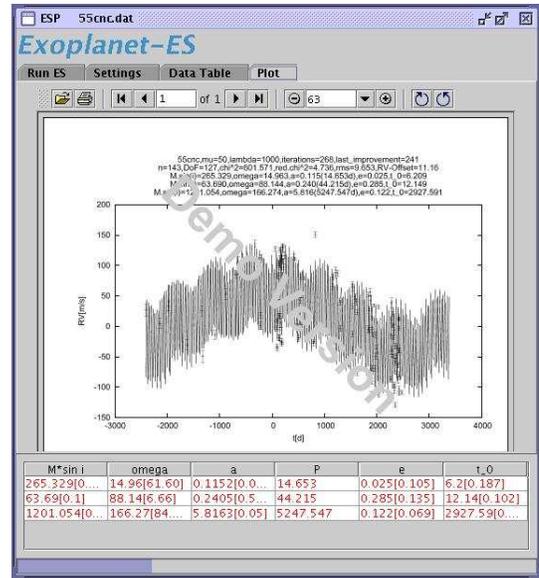
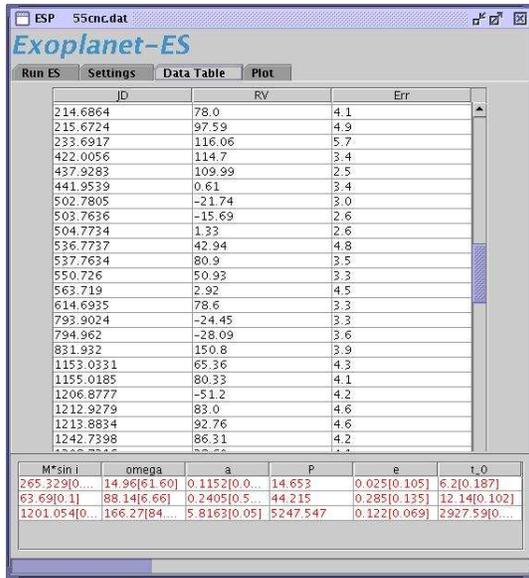


Abbildung 6.3: Screenshots des Userinterfaces (2).

Berechnung der χ^2 -Funktion notwendigen, Division durch den Messfehler zu vermeiden. Die erste Zeile des Files kann optional eine Spaltenüberschrift enthalten. Das Trennzeichen ist der Tabulator. Abbildung 6.3.1 enthält einen Auszug aus einer Eingabedatei.

JD-JD_0	RV [m/s]	Fehler [m/s]
51059.705748	-13.9380	1.80
51538.814779	-7.6642	1.10
51726.007124	-4.1386	0.68
51760.379138	-3.4582	0.93
52148.947208	4.1929	0.50
52596.539421	10.6361	2.04
52660.313006	11.1884	0.42
53390.808992	10.0644	1.34
53410.205391	9.9237	2.01
53442.278294	9.5298	1.06

Abbildung 6.4: Auszug aus einer Eingabedatei.

6.4 Generierung der Plots

Die gefundenen Planetenlösungen werden in einer mittels *gnuplot* erstellten Postscript-Grafik zusammengefasst. Die Grafik enthält: Objektname, μ , λ , Iterationsanzahl, χ^2 -Wert des Fits, RV-Anteil der Raumbewegung, Bahnelemente der gefundenen Lösung; in einem Plot (RV im Verlauf der Zeit) werden die Messpunkt mit Fehlerbalken und die RV-Kurve der gefundenen Lösung dargestellt. Im Falle von generierten Daten wird zusätzlich die RV-Kurve der tatsächlichen Lösung dargestellt. Für weitere grafische Darstellungen (wie z.B. der Phasenplots einzelner Planeten oder der Darstellung verschiedener Parameter- und Lösungswerte) wurden weitere *gnuplot* und *Python* Skripte erstellt. Unter *Python* fanden vor allem die Pakete *scipy* und *pygism* Verwendung.

6.5 Testdatengenerator

Zur komfortablen Generierung der Testdaten wurde ebenfalls ein grafisches Userinterface implementiert. Neben dem Zeitintervall und Parametern bzgl. der Verteilung und Streuung der Daten können mittels diesem die Bahnelemente der Planeten des zu simulierenden Systems festgelegt werden. Genauere Details zu der Simulation der Beobachtungsdaten werden im Kapitel 7 angegeben.

Kapitel 7

Ergebnisse

Intelligenz läßt sich nicht am Weg, sondern nur am Ergebnis feststellen.
Gary Kasparov

Die intrinsisch motivierte Interaktion zwischen Mensch und Computer
verifiziert jene funktionalstrukturelle Hypothese,
derzufolge sich die Evidenz der Realität
als Reduktion zur Komplexität interpretieren läßt...
Niels Sedat

In diesem Kapitel werden die experimentellen Ergebnisse vorgestellt. Dafür wird zunächst die Generierung der Testdaten beschrieben, anschließend Ergebnisse anhand verschiedener Testdaten präsentiert. Abschließend werden einige Ergebnisse der Anwendung auf reale Beobachtungsdaten dargestellt.

7.1 Testdatengenerierung

Eine realistische Simulation von Beobachtungsdaten erfordert eine korrekte Modellierung der Messfehler und den damit verbundenen Abweichungen des Messwertes vom tatsächlichen Wert. In Tabelle 7.1 sind die Mittelwerte und Streuungen der Messfehler gemäss den Beobachtungsdaten dreier Planetensysteme exemplarisch angegeben. Aufgrund dieser Werte können zur Modellierung die Werte $\mu = 3$ und $\sigma = 1$ zur Erzeugung einer Zufallszahl $z_i \sim N(\mu, \sigma) =: \sigma_i$ verwendet werden. Weiters wird zu jedem Datenpunkt eine Abweichung $\Delta_i x \sim N(x^*_i, \sigma_i)$ des Messwertes vom tatsächlichen Wert ermittelt, wodurch $x_i = x^*_i + \Delta_i x$. Dabei bezeichnet x^*_i den unverfälschten Messwert.

System	Quelle	\bar{x}	σ
<i>v</i> And	[BMF ⁺ 99]	9.55	2.4
55 Cnc	[MBF ⁺ 02]	4.49	1.67
HD 160691	[MBT ⁺ 04]	2.78	0.68

Tabelle 7.1: Mittelwerte und Varianz der Messfehler verschiedener Beobachtungsdaten

Neben der Modellierung der Messfehler, muss auch ein geeignetes Modell für die Zeitpunkte der Messungen gefunden werden. Da üblicherweise die Daten eines Observatoriums herangezogen werden, gibt es zahlreiche Einschränkungen für mögliche Beobachtungszeiten. Von einem bestimmten Beobachtungsort sind die meisten Objekte nur in etwa ein halbes Jahr beobachtbar. An den Tagen um Neumond finden kaum Beobachtungen für Planetensuchprogramme statt, da der dunkle Himmel in dieser Zeit vorwiegend für die Beobachtung lichtschwacher Objekte verwendet wird. Bei Objekten mit hoher RV-Variation werden oft auch mehrere Messungen pro Nacht durchgeführt, um etwaige extrem kurzperiodische Orbits besser bestimmen zu können. Die Vorgehensweise zur Erstellung von Beobachtungszeitpunkten erfolgt demnach iterativ, indem zunächst ein bestimmtes Jahr zufällig im vorgegebenen Zeitintervall gewählt wird. In diesem Jahr wird dann ein Tag innerhalb der ersten 200 Tage des Jahres wiederum zufällig gewählt.

Dadurch wird modelliert, dass der Stern nicht das ganze Jahr über beobachtet werden kann. Klarerweise ist das nur näherungsweise korrekt, da bestimmte Objekte das ganze Jahr über beobachtbar sind, andere nur wenige Nächte. In dem bestimmten Monat wird dann ein Tag innerhalb der ersten 15 Tage zufällig ausgewählt. Dadurch wird der Mondrhythmus simuliert, wobei näherungsweise angenommen wird, dass ein Mondumlauf genau einen Monat beträgt. In der gewählten Nacht werden dann wiederum zufallsgesteuert ein oder zwei Zeitpunkte gewählt. Die auf diese Weise erstellten Beobachtungszeitpunkte enthalten somit automatisch die Frequenzanteile Jahr, Monat und Tag. Das stellt im Allgemeinen kein Problem für die Planetensuche dar, jedoch müssen Orbits deren Umlaufperiode diesen Frequenzen nahe kommt diesbezüglich besonders genau untersucht werden. Mögliche Fehlerquellen hierbei liegen in jahreszeitlichen instrumentellen Effekten, als auch einem möglichen Hervortreten dieser Frequenzen im Fourier-spektrum.

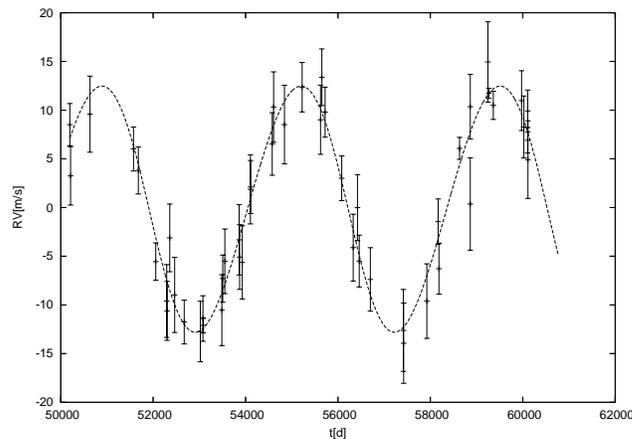
7.2 Testergebnisse

Zunächst wird die erreichbare Genauigkeit der verschiedenen Parameter anhand von generierten 1-Planeten-Systemen dargestellt. Dann wird untersucht inwieweit dem Sonnensystem ähnliche Planetensysteme aufgrund der bisherigen Beobachtungsdaten bereits erkennbar wären.

Die Rekombination RI wurde für alle diesem Kapitel präsentierten Fits verwendet, bei Mehrplanetensystemen wurde durchwegs die Rekombination RII und Hill-Mutation verwendet. Bei generierten Systemen enthalten die jeweiligen Tabellen zu allen Bahnelementen (B.E.) die Modellparameter (Lsg.) und die gefundene Lösung (Res.).

Die zu den Plots dieses Abschnitts zugehörigen Tabellen enthalten in der rechten Spalte die Mittelwerte der bestimmten Parameter von 5 Durchläufen des Algorithmus, in Klammer ist die jeweilige Standardabweichung angegeben. Im unteren Teil dieser Tabellen ist der beste gefundene Wert von red. χ^2 angegeben, in Klammer der gemittelte Wert.

Als erstes wurde ein jupiterähnlicher Planet untersucht. Trotz der, verglichen mit der RV-Variation, hohen Messfehlern werden die meisten Parameter gut erkannt (Abb. 7.1). Da $e \approx 0$ sind ω und t_0 schlecht bestimmt. Um t_0 genauer zu festzulegen, müssten $e = \omega = 0$ gesetzt werden, die Kombination der beiden ergibt dennoch die richtige Phaseninformation.

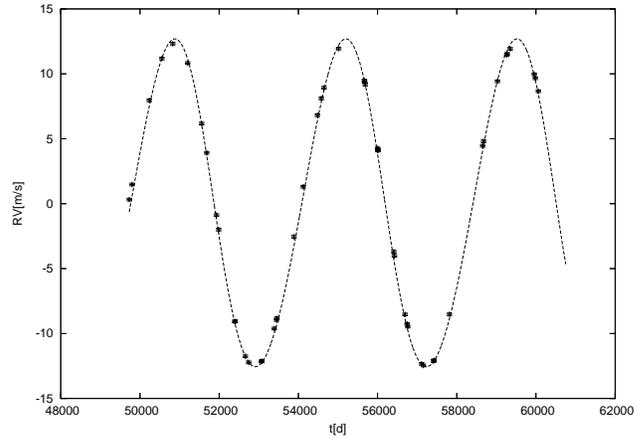


B.E.	Lsg.	Res.
$m \cdot \sin i [M_{\oplus}]$	317	319(1.9)
$\omega [^{\circ}]$	100	n/a
$a [AE]$	5.203	5.20(0.003)
$U [d]$	4335	4331(3.2)
e	0.048	0.1(0.06)
$t_0 [d]$	0	n/a
red. χ^2	0.497, (0.511)	
μ	30	
λ	3000	
Iterationen	500	

Abbildung 7.1: Testfall 1.

Um die Abhängigkeit der Qualität des Fits von den Messfehlern zu untersuchen, wurden Daten mit dem selben Modellplaneten generiert, die Fehler jedoch extrem klein gewählt ($\sigma = 0.1$, $\Delta x_i = 0, i = 0, \dots, n$). Die Ergebnisse (Abb. 7.2) zeigen eine entsprechende Verbesserung der

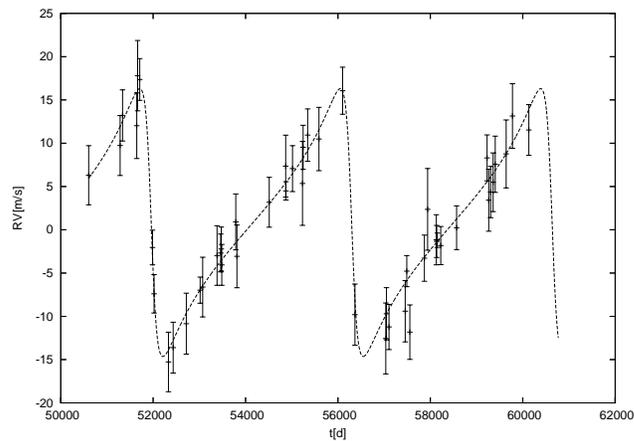
gefundenen Parameter im Vergleich zu den tatsächlichen Werten. Damit ist gezeigt, dass die ES tatsächlich die den Daten entsprechenden Parameterwerte findet.



B.E.	Lsg.	Res.
$m \cdot \sin i [M_{\oplus}]$	317	317 (1.1)
$\omega [^{\circ}]$	100	96(14)
$a [AE]$	5.203	5.203(0.002)
$U [d]$	4335	4335(1.6)
e	0.048	0.05(0.03)
$t_0 [d]$	0	4298(74)
red. χ^2	0.101, (0.127)	
μ	30	
λ	3000	
Iterationen	500	

Abbildung 7.2: Testfall 2.

In weiterer Folge wurden ähnliche Systeme, jedoch mit hoher Exzentrizität und unterschiedlichen Perihelwinkeln untersucht (Abb. 7.3, 7.4). Die damit verbundene Notwendigkeit zwei weitere Parameter (e und ω) gut zu bestimmen, um gute Fits zu erhalten, erhöht die Komplexität des Problems erheblich. Auch in diesen Fällen konnten die Parameter mit hoher Genauigkeit bestimmt werden. Abbildung 7.5 stellt die Ergebnisse bzgl. eines kurzperiodischen Systems dar.



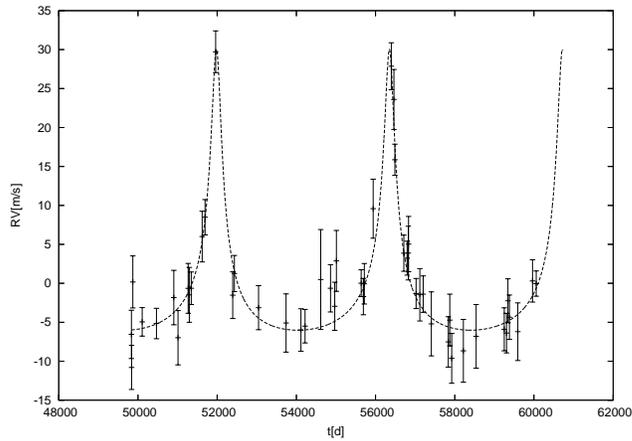
B.E.	Lsg.	Res.
$m \cdot \sin i [M_{\oplus}]$	317	308(6.8)
$\omega [^{\circ}]$	100	95(5.3)
$a [AE]$	5.203	5.204(0.003)
$U [d]$	4335	4337(3.1)
e	0.7	0.65(0.05)
$t_0 [d]$	0	4301(41)
red. χ^2	0.388, (0.428)	
μ	30	
λ	3000	
Iterationen	500	

Abbildung 7.3: Testfall 3

7.2.1 Sonnensystem

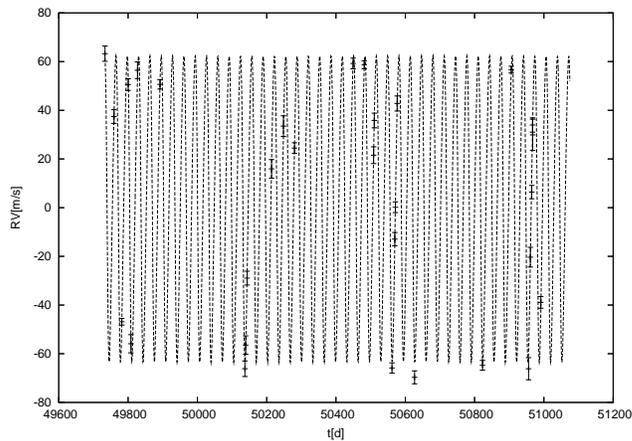
Dieser Abschnitt beschreibt die Anwendung des Algorithmus auf Testdaten, die dem Sonnensystem (Jupiter und Saturn) nachempfunden sind. Ein interessanter Aspekt dabei ist, inwieweit die Beobachtungsdaten der vergangenen 10–15 Jahre eine Entdeckung einer derartigen Konfiguration ermöglichen. Die Schwierigkeit dabei liegt insbesondere darin, dass das verhältnismässig schwache, niederfrequenteres Signal Saturns stark durch das höherfrequenteres (aufgrund der Masse) stärkere Signals überlagert ist. Tabelle 7.2 enthält die Parameter der generierten Daten.

Für verschiedene Beobachtungsintervalle wurden Testdaten mit jeweils 50 Datenpunkten



B.E.	Lsg.	Res.
$m \cdot \sin i [M_{\oplus}]$	317	310(4.3)
$\omega [^{\circ}]$	0	3 (2.1)
$a [AE]$	5.203	5.21(0.1)
e	0.7	0.69(0.03)
$t_0 [d]$	0	4284(98)
red. χ^2	0.528, (0.619)	
μ	100	
λ	3000	
Iterationen	500	

Abbildung 7.4: Testfall 4



B.E.	Lsg.	Res.
$m \cdot \sin i [M_{\oplus}]$	317	309(2.8)
$\omega [^{\circ}]$	100	101(1.5)
$a [AE]$	0.2	0.2(0.01)
e	0.2	0.19(0.02)
$t_0 [d]$	0	6.9(3.1)
red. χ^2	0.983, (1.721)	
μ	30	
λ	3000	
Iterationen	500	

Abbildung 7.5: Testfall 5. Kurzperiodisches System, die Beobachtungsdaten sind über mehrere Orbits verteilt.

erzeugt. Zum Vergleich mit dem Fourieransatz wurde das Programm *Period04, Version 1.0*¹ verwendet. Bei einem Beobachtungsintervall von 90 Jahren, was ungefähr drei Saturnumläufen entspricht, treten die Perioden beider Planeten sehr klar im Fourierspektrum hervor. Tabelle 7.3 stellt den mittels *Period04* ermittelten Fit demjenigen mit der ES gefundenen gegenüber.

Auf die Angabe der Werte ω , e und t_0 wurde verzichtet, da die ersten beiden im Fourierfit nicht auftreten, und außerdem diese Parameter aufgrund der geringen Exzentrizität sehr schlecht bestimmt sind. Die mittels der ES ermittelten Werte sind wenig aussagekräftig, die Werte von e sind richtigerweise kleiner als 0.1. Verkürzt man das Intervall der Beobachtungen auf 30 Jahre, also in etwa ein Saturnumlauf, tritt die Saturnfrequenz im Fourierspektrum nicht mehr klar hervor. Es sind dann manuelle Einschränkungen auf plausible Werte notwendig, um vernünftige Resultate zu erhalten. In Tabelle 7.4 sind die mittels *Period04* und der ES gefundenen Parameter dargestellt.

Hierzu ist anzumerken, dass die Saturnperiode mittels *Period04* in diesem Fall genauer be-

¹*Period04* wurde am Institut für Astronomie Wien, in der Arbeitsgruppe von Michel Breger entwickelt. *Period04* wurde hauptsächlich für das Finden von Multiperiodenfits in oszillierenden Sternen entwickelt, ist aber ebensogut für das Ermitteln von Sinusfits für Planetendaten geeignet. Mittels Fouriertransformation werden dominierende Frequenzen gefunden, welche interaktiv in das Fitmodell aufgenommen werden können. Aufgrund dieser Frequenzen wird anschließend mittels Gradientenverfahren ein Mehrperioden-Sinusfit ermittelt.

Parameter	Planet 1	Planet 2
$m \cdot \sin i [M_{\odot}]$	317	95
$\omega [^{\circ}]$	100	113
$a [AE]$	5.203	9.537
$P[a]$	11.87	29.45
e	0.048	0.054
$t_0 [d]$	0	0

Tabelle 7.2: Testdaten für das Sonnensystem.

Parameter	Period04	ES
χ^2	176.922	18.9
$m_1 \cdot \sin i [M_{\odot}]$	300	330
$m_2 \cdot \sin i [M_{\odot}]$	85	102
$P_1[y]$	11.9	11.86
$P_2[y]$	30.62	30.4

Tabelle 7.3: Vergleich zwischen Period04 und der ES für das 90-Jahres Intervall.

Parameter	Period04	ES
χ^2	454	33.6
$m_1 \cdot \sin i [M_{\odot}]$	273	316
$m_2 \cdot \sin i [M_{\odot}]$	60	55
$P_1[y]$	11.95	11.89
$P_2[y]$	29.25	26.8

Tabelle 7.4: Vergleich zwischen Period04 und der ES für das 30-Jahres Intervall.

stimmt ist, die Jupitermasse jedoch wesentlich schlechter. Die Jupiterfrequenz wird erstaunlicherweise in beiden Fällen mittels der ES genauer erkannt, was auf die Routine zum Erstellen des Sinusfits für beide Frequenzen in Period04 zurückzuführen ist.

Verkürzt man das Intervall der Beobachtungen weiter auf 10 Jahre, ist die Saturnfrequenz mittels Fourieranalyse sehr schlecht zu bestimmen, da keine vollständige Periode vorliegt. Mittels Period04 lässt sich somit auf direktem Weg kein brauchbarer Fit ermitteln. Ebenso liefert die Evolutionsstrategie beim Intervall der Beobachtungsdaten von 10 Jahren keine aussagekräftigen Ergebnisse. Jupiter wird eindeutig erkannt, während die durch Saturn entstehenden Abweichungen von einem exakten Keplerorbit durch verschiedenste massearme Planeten innerhalb und ausserhalb der Jupiterbahn approximiert werden. Die resultierenden zweiten Planeten mit von Null verschiedener Masse deuten zwar die Existenz eines weiteren Planeten an, ermöglichen aber keine genaueren Aussagen über dessen Bahnelemente und Masse.

Parameter	ES	[BTM ⁺ 01]
$m \cdot \sin i [M_{\oplus}]$	146	146
$\omega [^{\circ}]$	0	0
$a [AE]$	0.047	0.047
$P[d]$	3.508	3.508(0.001)
e	0.014	0.014(0.005)
$t_0 [d]$	2451214.5	2451214.5(0.001)
$v_{RB,rad}$	19.99	n/a
red. χ^2	1.129	1.3
rms [ms ⁻¹]	4.69	4.82

Tabelle 7.5: Bahnelemente des Planeten bei HD75289

7.3 Anwendung der ES auf Beobachtungsdaten

Dieser Abschnitt enthält eine Auswahl der Ergebnisse der Anwendung des Algorithmus auf verschiedene Beobachtungsdaten. Wie schon zuvor ausführlich erörtert, erfordert die Bestimmung von Planeten eine ausführliche astronomische Analyse, die den Umfang dieser Arbeit bei weitem sprengen würde. Diese Analyse beinhaltet unter anderem die Untersuchung der Stabilität des Systems, die Diskussion verschiedener Störfaktoren oder möglicher Artefakte wie z.B. die durch Tages-, Monats- und Jahresrhythmus entstehenden Scheinfrequenzen als auch der Analyse möglicher alternativer Entstehungsmechanismen der RV-Variationen. Die weitere Diskussion beschränkt sich lediglich auf die “technische Qualität” des Fits. Für die in weiterer Folge durchgeführten Fits wurden durchwegs sehr hohe Werte für die Populationsgrösse und Anzahl erzeugter Nachkommen gewählt ($\mu = 50$, $\lambda = 5000$), um Lösungen mit guter Qualität zu erreichen. Ebenso fand in allen Fällen sowohl die Recombination RI und RII, als auch die Hill-Mutation Anwendung. Es wurden jeweils 1000 Iterationen durchgeführt, was im Falle der 3-Planetensysteme zu Laufzeiten von mehreren Stunden führt. Die Ein- und Zwei-Planetensysteme waren (auch aufgrund der niedrigeren Anzahl an Datenpunkten) in ca. einer halben Stunde gelöst. Üblicherweise ist bereits nach 100 - 200 Iterationsschritten eine gute Lösung gefunden, die sich nur durch geringfügige Variationen der Parameter von den Werten der besten gefundenen Lösung unterscheidet. Eine weitere Verbesserung erfordert jedoch eine sehr feine Abstimmung der Parameter, weshalb eine hohe Iterationsanzahl unumgänglich ist. Eine direkte Verwendung einer lokalen Methode kann wahrscheinlich die Anzahl der benötigten Iterationen erheblich verringern, erfordert allerdings ihrerseits wieder eine beträchtliche Anzahl an Auswertungen der χ^2 -Funktion, und somit sehr hohen Laufzeiten.

7.3.1 HD75289

In [BTM⁺01] werden unter anderem die Daten und eine verbesserte 1-Planetensystem-Lösung zu dem System HD 75289 präsentiert. Die mittels der ES gefundene Lösung stimmt vollkommen mit jener der von den Autoren gefundenen überein. In Abbildung 7.3.1 ist die gefundene Lösung dargestellt, Tabelle 7.5 enthält die ermittelten Bahnelemente. Die Masse des Zentralsternes wurde wie in [BTM⁺01] mit $1.15M_{\odot}$ angenommen. Dadurch konnte gezeigt werden, dass der Algorithmus und insbesondere das zugrundeliegende Kepler-Modell korrekt funktioniert, und die Qualitätsmaße (red. χ^2 und rms) mit jenen aus bestehenden Publikationen zu diesem Thema übereinstimmen.

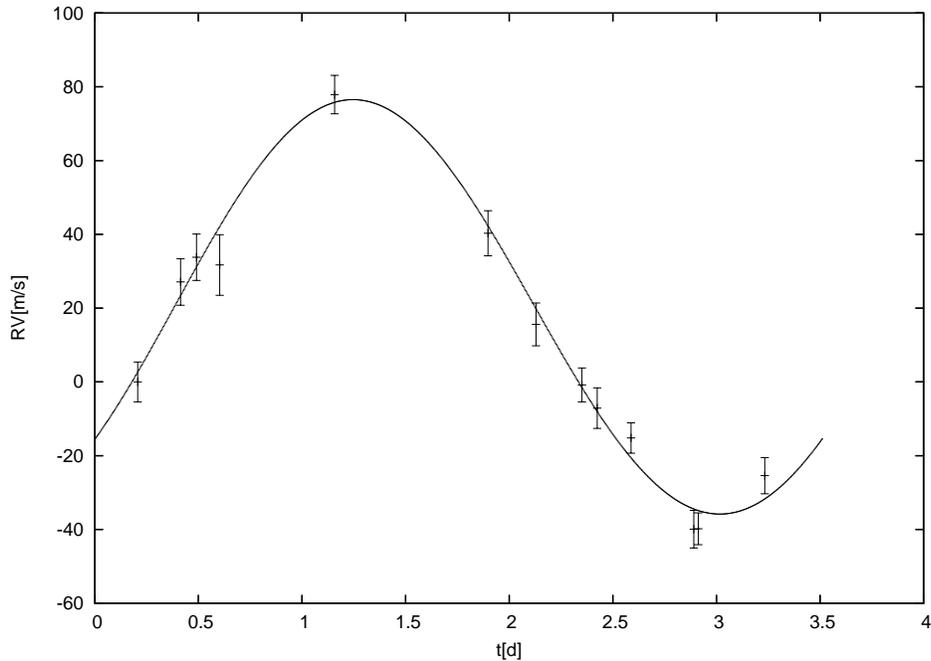


Abbildung 7.6: Phasenplot des Planeten bei HD75289.

7.3.2 Barnards Pfeilstern

Die Beobachtungsdaten zu Barnards Pfeilstern wurden dankenswerterweise direkt von Martin Kürster (Principle Investigator des Planetensuchprogrammes bei M-Sternen mit dem ESO Coude Echelle Spectrometer auf La Silla, siehe z.B.[KER⁺03]) zur Verfügung gestellt. Der Stern zeigt eine RV-Variation im Bereich von 5 m/s. Die Ursache des Signals ist bis heute nicht restlos geklärt, jedoch erscheinen Planeten als Ursache durchaus plausibel. Im Folgenden werden verschiedene gefundene Lösungen dargestellt, wobei die Masse des Zentralsternes jeweils mit $0.16 M_{\odot}$ festgelegt wurde.

Während bei der Fouriermethode verschiedene Frequenzen im Frequenzspektrum ähnlich stark hervortreten und zu ähnlich guten Fits führen, konvergiert die ES bei verschiedenen Durchläufen zu verschiedenen Ergebnissen. Diese stellen im Wesentlichen eine Kombination aus drei Perioden dar, nämlich ≈ 36.5 Tage, ≈ 82 Tage und ≈ 385 Tage. Die geringsten χ^2 -Werte liefert eine Kombination der Perioden ≈ 36.5 Tage und ≈ 82.6 Tage. Tabelle 7.6 enthält die besten (verschiedenartigen) gefundenen Lösungen, die Abbildungen 7.7-7.10 stellen die besten gefundenen Lösungen grafisch dar.

7.3.3 55 Cancri

Der 3-Kepler-Fit zum 55 Cnc System wurde anhand der in [MBF⁺02] publizierten RV-Daten durchgeführt, die Sternmasse mit $0.95 M_{\odot}$ festgelegt. Das beste von den Autoren gefundene 3-Planeten-Keplermodell ist in Tabelle 7.7 dargestellt (Die Massen wurden auf $1M_{\oplus}$ gerundet, die Klammern enthalten die Angaben der Fehler).

Die Tabelle 7.8 enthält die beste mittels der ES gefundene 3-Kepler-Lösung des 55-Cancri Systems. Die Abbildungen 7.11, 7.12 und 7.13 enthalten die entsprechenden Phasenplots der Planeten. Die Autoren geben in [MBF⁺02] eine mittlere RV-Abweichung von $\text{rms} = 8.5\text{m/s}$ an. Der beste mittels der ES gefundene Fit erreicht $\text{rms} = 9.1\text{m/s}$. Die Ursache für die höheren rms-Werte scheint die schlechtere Bestimmung des äußeren Planeten zu sein. Da nur eine vollständige

Parameter	Lösung 1	Lösung 2
$red.\chi^2$	0.624	0.637
$m_1 \cdot \sin i [M_{\oplus}]$	5.3	3.9
$m_2 \cdot \sin i [M_{\oplus}]$	10.8	4.4
$\omega_1 [^{\circ}]$	135	122
$\omega_2 [^{\circ}]$	357	275.0
$a_1 [AE]$	0.1169	0.1167
$a_2 [AE]$	0.5626	0.2013
$P_1 [d]$	36.546	36.441
$P_2 [d]$	365.44	82.515
e_1	0.37	0.34
e_2	0.56	0.84
$t_{0,1} [d]$	13.58	18.85
$t_{0,2} [d]$	241.79	59.99

Tabelle 7.6: 2-Planetenfits zu Barnards Pfeilstern

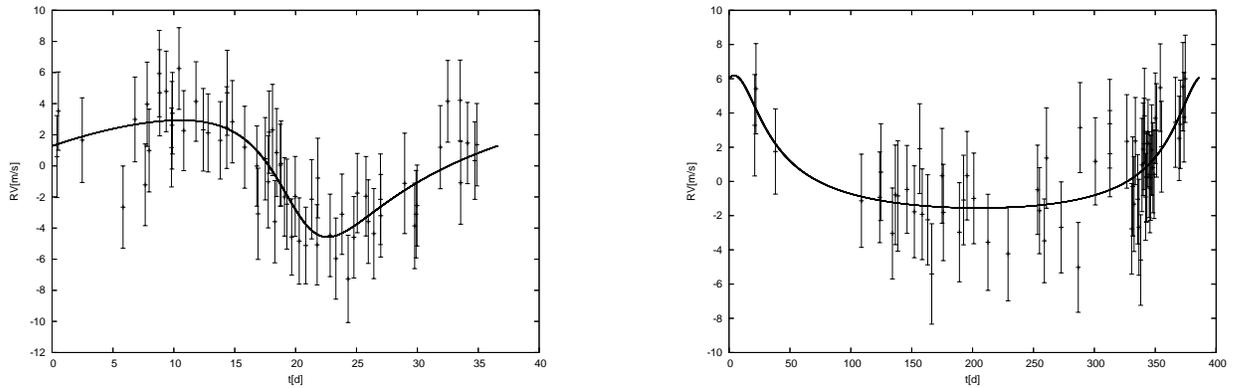


Abbildung 7.7: Phasendiagramm der Lösung 1 zu Barnards Pfeilstern beider Planeten.

Parameter	Planet 1	Planet 2	Planet 3
$m \cdot \sin i [M_{\oplus}]$	266(1)	67(13)	1284(127)
$\omega [^{\circ}]$	99(35)	61(25)	201(22)
$a [AE]$	0.115(0.003)	0.241(0.005)	5.9(0.9)
e	0.020(0.02)	0.339(0.21)	0.16(0.06)
$t_0 [d]$	1.479(...)	31.9(2.5)	2785(250)

Tabelle 7.7: 55 Cnc, 3-Planeten Keplermodell, [MBF⁺02]

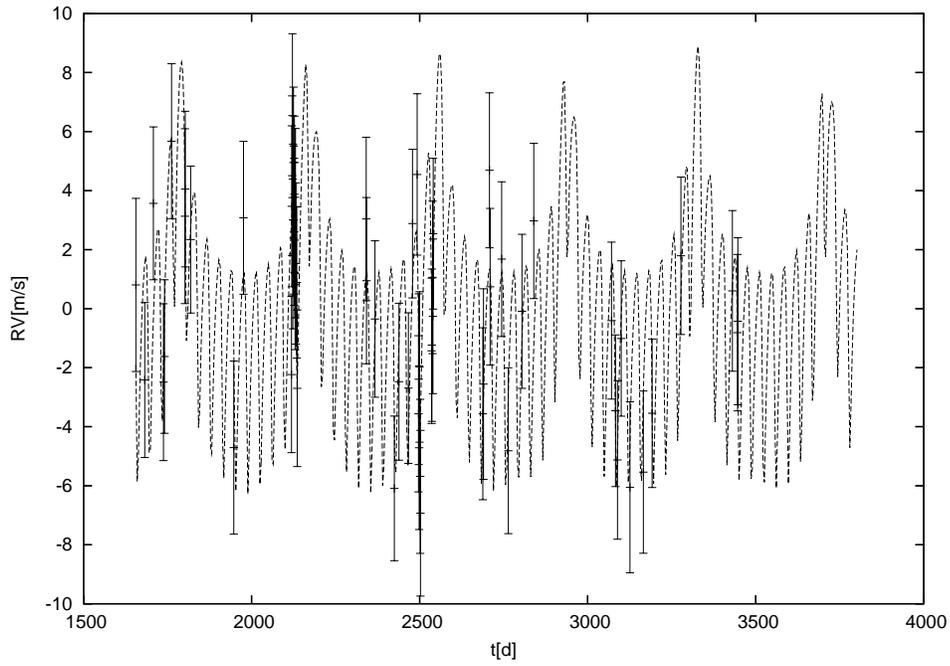


Abbildung 7.8: Lösung 1 zu Barnards Pfeilstern

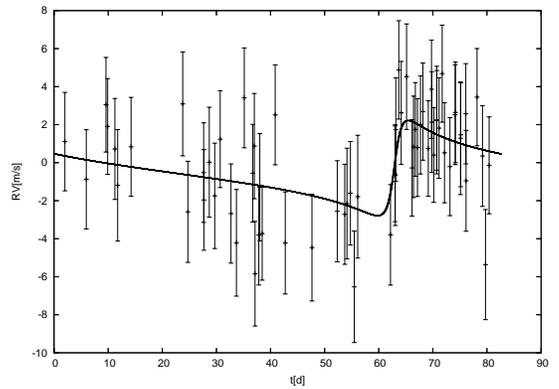
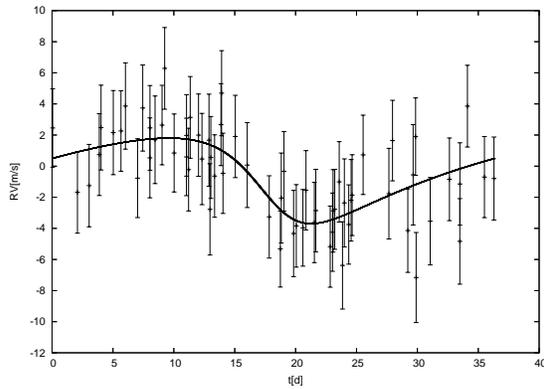


Abbildung 7.9: Phasendiagramm der Lösung 2 zu Barnards Pfeilstern beider Planeten.

Parameter	Planet 1	Planet 2	Planet 3
$m \cdot \sin i [M_{\oplus}]$	266	67	1280
$\omega [^{\circ}]$	110	63	218
$a [AE]$	0.1152	0.2409	5.93
e	0.037	0.31	0.14
$t_0 [d]$	1.69	31.1	2871

Tabelle 7.8: Beste mit der ES gefundene 3-Kepler-Lösung des 55 Cnc Systems

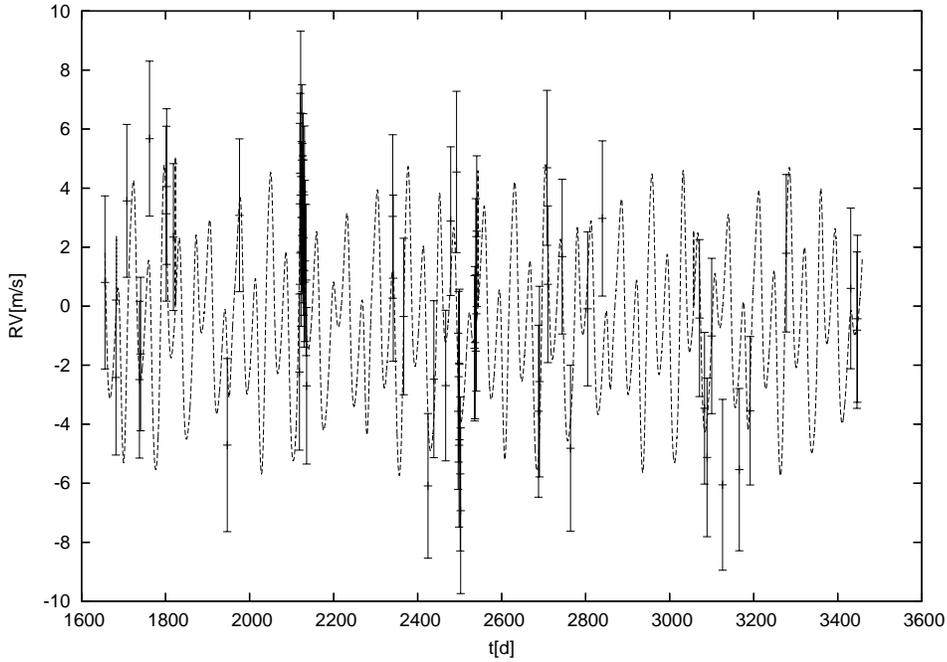


Abbildung 7.10: Lösung 2 zu Barnards Pfeilstern

Periode dieses Planeten vorliegt, ist dessen Frequenz naturgemäß schlecht bestimmt. In solchen Fällen können relativ große Bereiche der großen Halbachse ähnlich gute Fits erzeugen. Weitere Beobachtungen, zu welchen zu diesem Zeitpunkt leider noch keine Daten vorliegen, ermöglichten die Entdeckung eines vierten, kurzperiodischen Planeten mit $14 M_{\oplus}$ bei 0.038 AE, und die grosse Halbachse des äußeren Planeten wurde zu 5.1 AE bestimmt. Die Phasenplots der Planeten lassen keine signifikanten Unterschiede zu jenen in [MBF⁺02] erkennen, mehrere Durchläufe ergaben ähnliche Fits mit nur geringfügig schlechteren rms-Werten und vor allem Abweichungen der Parameter ω und t_0 . Für die große Halbachse des äußeren Planeten ergaben sich oftmals geringfügig höhere Werte. Insgesamt konvergiert der Algorithmus in etwa in 90% der Fälle zur richtigen Konfiguration. Die Erkennung des mittleren Planeten stellt meist das größte Problem dar, da das Signal aufgrund der vergleichsweise geringen Masse eher schwach ausgeprägt ist.

Das globale Optimum wird somit in 90% aller Fälle erreicht, und die einmalige Anwendung einer lokalen Methode (wie z.B. dem Levenberg-Marquard Verfahren) ermöglicht bei derartig genau bestimmten Lösungen mit hoher Wahrscheinlichkeit das Erreichen der absolut optimalen Parameterkonfiguration in dieser Umgebung.

7.3.4 ν Andromedae

In [BMF⁺99] wurden Beobachtungsdaten zum System ν Andromedae publiziert und eine 3-Planeten-Kepler-Lösungen angegeben². In Tabelle 7.9 sind die von den Autoren gefundenen Parameterwerte dargestellt, die Masse des Zentralsternes beträgt $1.3 M_{\odot}$. Tabelle 7.10 enthält die mittels der ES gefundenen Parameter, welche zum besten Fit geführt haben. In allen Durchläufen wurde die richtige Konfiguration erkannt, somit ist dieses System für die Evolutionsstrategie einfacher zu lösen als 55-Cnc. Abbildungen 7.14 und 7.15 stellen diese Lösung grafisch dar. Die Perihelzeit t_0 in 7.9 bezieht sich auf JD=2450000, die in 7.10 angegebene auf JD=2400000, den

²Das Paper enthält zwei Datensamples unterschiedlicher Observatorien, und es werden jeweils separate Fits und ein gemeinsamer Fit angegeben. In diesem Abschnitt wird in weiterer Folge nur das grössere Datensample vom Lick-Observatorium betrachtet.

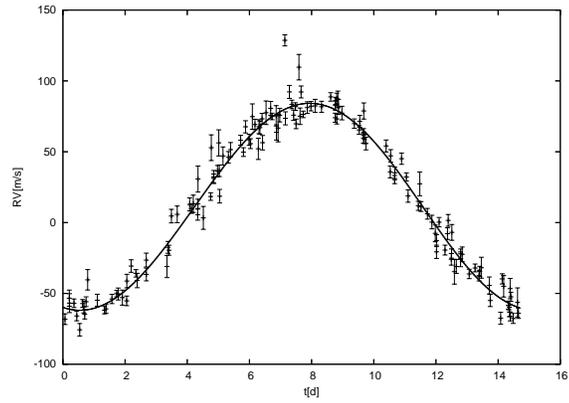


Abbildung 7.11: Planet bei 0.115 AE des 55 Cnc Systems

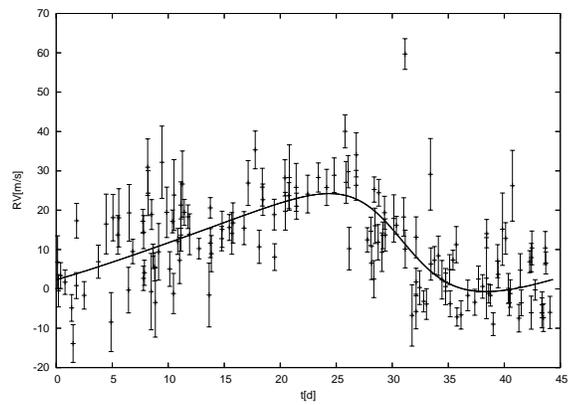


Abbildung 7.12: Planet bei 0.24 AE des 55 Cnc Systems

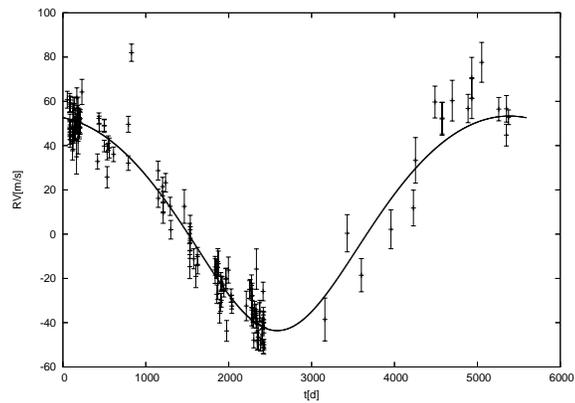


Abbildung 7.13: Planet bei ≈ 5.9 AE des 55 Cnc Systems

Parameter	Planet 1	Planet 2	Planet 3
$m \cdot \sin i [M_{\oplus}]$	228.8	627.2	1306
$\omega [^{\circ}]$	16(139)	261(47)	236(14.6)
$a [AE]$	0.059	0.83	2.5
e	0.042(0.03)	0.23(0.6)	0.36(0.05)
$t_0 [d]$	315.34	1131.24	3813.46

Tabelle 7.9: In [BMF⁺99] angegebener 3-Kepler-Fit an die ebendort publizierten Daten des Systems ν And. Die Werte in den Klammern stellen die jeweiligen Fehler dar.

Parameter	Planet 1	Planet 2	Planet 3
$m \cdot \sin i [M_{\oplus}]$	221	618	1278
$\omega [^{\circ}]$	23	246	240
$a [AE]$	0.0592	0.827	2.51
e	0.026	0.28	0.30
$t_0 [d]$	0.98	31.7	1074

Tabelle 7.10: Mittels der ES ermittelte 3-Kepler-Lösung zum System ν And

Nullpunkt des Datensatzes. Die Autoren von [BMF⁺99] erhalten für den besten Fit Residuen von $rms = 15.12$, der Fit mit den Parameterwerten aus 7.10 führt zu $rms = 15.91$. Die Messpunkte mit den relativ hohen RV-Abweichungen vom Fit in Abbildung 7.15 befinden sich bei den in [BMF⁺99] angegebenen Fits an nahezu derselben Stelle, sind also keine Auswirkung der etwas unterschiedlichen Bahnelemente. Somit kann auch das ν -Andromedae System als gelöst betrachtet werden.

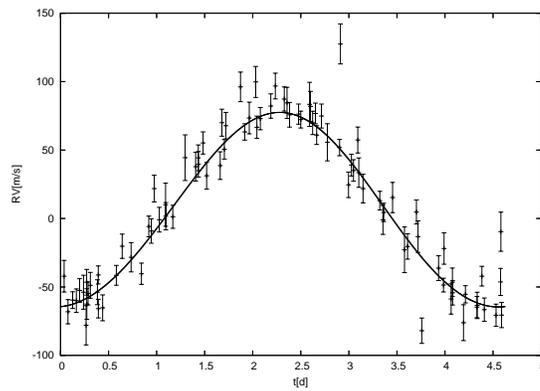
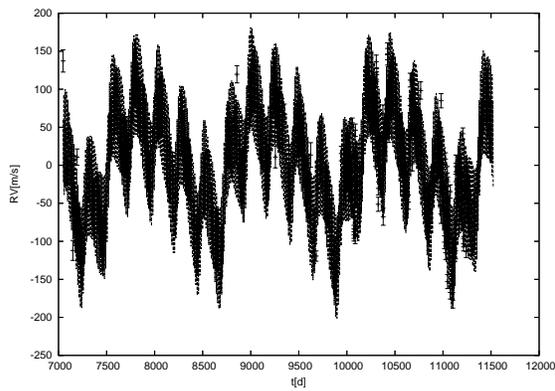


Abbildung 7.14: Gesamtfit(links) und Phasenplot(rechts) des ersten Planeten des Systems *v*-And.

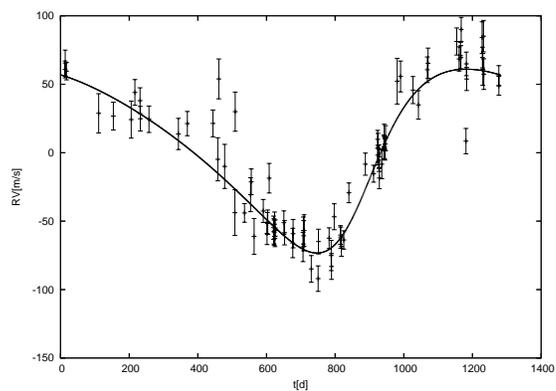
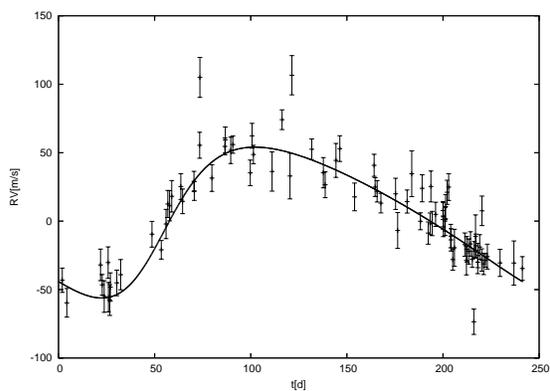


Abbildung 7.15: Phasenplot der Planeten 2(links) und 3(rechts) des Systems *v*-And.

Kapitel 8

Zusammenfassung und Diskussion

So eine Arbeit wird eigentlich nie fertig;
man muss sie für fertig erklären, wenn man nach Zeit und Umständen das Mögliche getan hat
J. W. v. Goethe

In dieser Arbeit wurde ein Evolutionärer Algorithmus zur Bestimmung der Bahnparameter Extrasolarer Planeten vorgestellt. Die Funktion des Algorithmus wurde einerseits mit generierten Testdaten, andererseits auch mit realen Beobachtungsdaten demonstriert. Bei einfachen Systemen wurde die Qualität der publizierten Lösungen erreicht und teilweise verbessert. Dadurch konnte gezeigt werden, dass mittels Evolutionärer Algorithmen die Bahnelemente von Extrasolaren Planeten mindestens genauso gut bestimmt werden können wie mit traditionellen Verfahren, z.B. dem fourierbasierten Ansatz.

Darüberhinaus wurden auch bestehende ähnliche Ansätze mittels Standardimplementierungen von Genetischen Algorithmen dargestellt. Die bekannten Nachteile Genetischer Algorithmen bezüglich numerischer Probleme und das wenig problemspezifische Agieren der standardmäßigen genetischen Operatoren wurde als Grund für die Notwendigkeit der dort verwendeten, rechenintensiven lokalen Methode (Levenberg-Marquard) identifiziert.

Die in dieser Arbeit präsentierte Evolutionsstrategie benötigt keinerlei lokale Methoden zum Auffinden des globalen Optimums. Somit können auch komplexere Systeme mit einer hohen Anzahl an Planeten effizient gelöst werden. In diesen Fällen erreicht die Lösungsgüte nicht immer die publizierten Werte, jedoch kann diese mittels einmaliger Anwendung lokaler Verfahren erreicht werden.

Ein großer Vorteil dieses Ansatzes ist, dass auch für komplexe Systeme sehr schnell gute Startlösungen gefunden werden können, welche anschließend beispielsweise durch numerische Integration (welche vor allem bei stark wechselwirkenden Systemen unumgänglich ist) weiter verbessert werden können. Die direkte Verwendung eines numerischen Integrators anstatt des Kepler-Modells stellt eine vielversprechende mögliche Erweiterung dieses Ansatzes dar.

Ein weiterer wichtiger Vorteil im Gegensatz zur Fouriermethode ist, dass keinerlei Annahmen (wie zum Beispiel der Kreisförmigkeit der Orbits) in das Modell eingehen. Ebenso können Planeten erkannt werden, die im Fourierspektrum aufgrund von Resonanzen oder hohen Exzentrizitäten sehr schwach hervortreten.

Der Schwerpunkt dieser Arbeit war die Beschreibung, Analyse und Dokumentation der Funktionsweise des Algorithmus. Darüber hinaus wurden auch noch nicht publizierte Daten von Sternen ohne gesicherte Planeten analysiert. Bei vielen dieser Daten ist unklar, ob die Radialgeschwindigkeitsvariation des Sternes aufgrund komplexer Planetensysteme oder anderen Ursachen zustande kommt. Insbesondere wenn in derartigen Fällen das Fourierspektrum wenig aussagekräftig ist, stellen heuristische Verfahren eine vielversprechende Methode dar mögliche Planetenmodelle zu ermitteln. Derartige Hypothesen können dann in weiterer Folge durch Beobachtungen zu bestimmten Zeitpunkten erhärtet oder widerlegt werden.

Die Anwendung des Algorithmus auf ungelöste potentielle Planetensysteme, verbunden mit einer genauen astronomischen Analyse derselben wird zeigen inwieweit sich dieser Ansatz behaupten kann. Der Autor ist hierbei zuversichtlich, dass diese Evolutionsstrategie einen wertvollen Beitrag zur Entdeckung neuer Systeme leisten kann.

Anhang A

Physikalische Konstanten und Astronomische Größen

Dieser Anhang enthält Tabellen mit für diese Arbeit relevanten physikalischen Konstanten und Größen (Quelle [UB99]).

A.1 Physikalische/Astronomische Konstanten

Bedeutung	Symbol	Wert
Gravitationskonstante	G	$6.6726 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$
Boltzmannkonstante	k	$1.3807 \cdot 10^{-23} \text{JK}^{-1}$
Atommasseneinheit	m_u	$0.6605 \cdot 10^{-27} \text{kg}$

Tabelle A.1: Physikalische Konstanten

A.2 Astronomische Symbole

Symbol	Objekt
\odot	Sonne
\oplus	Erde
$\♃$	Jupiter

Tabelle A.2: Astronomische Symbole

A.3 Größen bezüglich des Sonnensystems

Symbol	Wert
M_{\odot}	$1.989 \cdot 10^{30} \text{kg}$
R_{\odot}	$6.96 \cdot 10^8 \text{m}$
M_{\oplus}	$5.973 \cdot 10^{24} \text{kg}$
$a_{\oplus} = AE$	$1.496 \cdot 10^{11} \text{m}$
M_{J}	$1.89 \cdot 10^{27} \text{kg}$
a_{J}	$7.45 \cdot 10^{11} \text{m}$
siderisches Jahr	$365.256 \text{d} = 3.1558 \cdot 10^7 \text{s}$
tropisches Jahr	$365.242 \text{d} = 3.1557 \cdot 10^7 \text{s}$

Tabelle A.3: Größen bezüglich des Sonnensystems

Planet	max. Abw. v. Schw.Pkt	max. RV
Erde	$4.4 \cdot 10^5 \text{m}$	1 m/s
Jupiter	$7 \cdot 10^8 \text{m}$	10 m/s

Tabelle A.4: Größenordnungen der Radialgeschwindigkeiten

Anhang B

Verwendete Algorithmen

B.1 Lösung der Keplergleichung

Die Keplergleichung ist eine transzendente Gleichung, deren Lösung durch numerische iterative Verfahren gewonnen werden kann. Die Lösung der Keplergleichung ist aus numerischer Sicht in den meisten Fällen sehr einfach. Es wird eine, an das Problem angepasste Kombination aus dem *Newton-Verfahren* und *Bisektion* verwendet. Zunächst wird das quadratisch konvergente Newtonverfahren verwendet, welches in den meisten Fällen nach wenigen Iterationsschritten eine ausreichend genaue Lösung liefert. Wurde nach einer bestimmten vorgegebenen Iterationsanzahl (in diesem Fall 20) keine Lösung gefunden, so wird das Bisektionsverfahren verwendet, welches zwar eine langsamere Konvergenzrate besitzt, jedoch mit Sicherheit eine gültige Lösung liefert, sofern diese im Anfangsintervall eingeschlossen ist, was in diesem Fall einfach zu gewährleisten ist. Als Startwert für das Newton-Verfahren wird $E^{(0)} = M$ gewählt. Der Fall hoher Exzentrizitäten ($e > 0.8$) und $M < \frac{\pi}{3}$ erfordert eine genauere Wahl des Startwertes $E^{(0)}$:

$$E^{(0)} = \begin{cases} \frac{M}{|1-e|} & \text{wenn } \left(\frac{M}{|1-e|}\right)^2 \leq 6 \cdot |1-e| \\ M^{1/3} & \text{wenn } \left(\frac{M}{|1-e|}\right)^2 > 6 \cdot |1-e| \text{ und } M < \pi \\ \operatorname{asinh}\left(\frac{M}{e}\right) & \text{wenn } \left(\frac{M}{|1-e|}\right)^2 > 6 \cdot |1-e| \text{ und } M \geq \pi \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Die in B.1 angegebenen Startwerte wurden gemäss den in einer frei verfügbaren Implementierung einer Routine zur Lösung der Keplergleichung (<http://www.projectpluto.com/>) verwendeten Startwerten gewählt.

B.1.1 Newton-Verfahren

Das im folgenden verwendete Verfahren ist das *Newton-Verfahren*, welches quadratisch konvergent ist. Die folgende Formulierung basiert auf [Überhuber], wobei dem Problem angepasste Bezeichnungen gewählt werden. Für die Gleichung

$$f(E) = E - e \sin E - M \quad (\text{B.2})$$

soll eine Lösung gefunden werden. Die nichtlineare Funktion $f(E)$ wird durch eine lineare Modellfunktion,

$$l_k(E) = a_k + b_k E \approx f(E) \quad (\text{B.3})$$

ersetzt. Die Nullstellen dieser Funktion können dann als Näherung für die Nullstellen der tatsächlichen Funktion verwendet werden. Die Funktion l_k erhält man durch Linearisierung (Abbruch der Taylor-Entwicklung um die Stelle $E^{(k)}$ nach dem linearen Term):

$$l_k(E) = f(E^{(k)}) + (E - E^{(k)})f'(E^{(k)}) \approx f(E) \quad (\text{B.4})$$

In diesem Fall ist $f'(E) = 1 - e \cos E$, d.h.

$$a_k = f(E^{(k)}) - E^{(k)}f'(E^{(k)}), b_k = f'(E^{(k)}) \quad (\text{B.5})$$

und somit

$$E^{(k+1)} = E^{(k)} - \frac{f(E^{(k)})}{f'(E^{(k)})} \quad (\text{B.6})$$

Das heißt, man wählt ein E aus, und bestimmt (mittels Modellfunktion) eine lineare Funktion in diesem Punkt, für die dann die Nullstelle algebraisch ausgerechnet werden kann. An genau diesem E wird dann die nächste Modellfunktion gebildet. Diese Nullstelle liegt dann schon wesentlich näher bei der tatsächlichen Nullstelle von $f(E)$. Die Voraussetzung für die Konvergenz dieses Verfahrens ist ein Startwert $E^{(0)}$, der für die jeweilige Funktion ausreichend nahe beim tatsächlichen Wert liegt (für genauere Details siehe [Überhuber]). Es läßt sich zeigen, dass im Falle einfacher Nullstellen und ausreichender Differenzierbarkeit von f das Newton-Verfahren *mindestens* quadratisch konvergent ist. Das Verfahren wird abgebrochen wenn $f(E^{(k)})$ kleiner als ein vorgegebener Wert ist.

B.1.2 Bisektion

Das Prinzip dieses Verfahrens beruht darauf, da man in einem bestimmten Intervall bei verschiedenen Vorzeichen der Funktionswerte an den Grenzen des Intervalls auf eine, oder mehrere Nullstellen innerhalb des Intervalles schließen kann. Das heißt $\exists x^* \in (x_l, x_r)$ mit $f(x^*) = 0$. Das gegebene Intervall, in welchem eine Nullstelle liegt, wird nun sukzessive halbiert, bis es beliebig klein ist, und die Nullstelle nach wie vor enthält. Der Pseudocode zu diesem Algorithmus sieht folgendermaßen aus:

```
BISECTION ( $x_l, x_r$ )
1   $x_m \leftarrow (x_r + x_l)/2$ 
2  while  $\|f(x_m)\| \leq \epsilon$  do
3     $x_m \leftarrow (x_r + x_l)/2$ 
4    if  $f(x_m) < 0$  then
5       $x_r = x_m$ 
6    else
7       $x_l = x_m$ 
8    endif
9  endwhile
```

Die Parameter x_l und x_r bezeichnen das Startintervall, $f(x)$ die Funktion deren Nullstelle gefunden werden soll, und ϵ ist eine vorgegebene Genauigkeitsschranke. Wenn man zwei Randwerte mit unterschiedlichem Vorzeichen gefunden hat, so konvergiert das Verfahren auf jeden Fall. Die Voraussetzungen sind lediglich die Stetigkeit der Funktion im gegebenen Intervall. Das Verfahren konvergiert linear, mit dem Konvergenzfaktor $1/2$.

B.2 Erzeugung normalverteilter Zufallszahlen

In der einschlägigen Literatur findet man eine Vielzahl möglicher Algorithmen zur Erzeugung von normalverteilten Pseudozufallszahlen. In Anlehnung an die Darstellung in [PTVF92] wurde der folgende Algorithmus implementiert.

```
N ( $\mu, \text{sigmasquare}$ )
1   $u1, u2 \leftarrow \text{RANDOM}()$ 
2   $x1 \leftarrow \text{SQRT}(-2 * \text{LOG}(u1)) * \text{COS}(2 * \text{PI} * u2)$ 
3   $x2 \leftarrow \text{SQRT}(-2 * \text{LOG}(u2)) * \text{SIN}(2 * \text{PI} * u1)$ 
4   $d \leftarrow \text{RANDOM}()$ 
5  if  $d \geq 0.5$  then
6    return  $\mu + \text{sigmasquare} * x1$ 
7  endif
8  return  $\mu + \text{sigmasquare} * x2$ 
```

Literaturverzeichnis

- [Bä96] T. Bäck. *Evolutionary Algorithms in Theory and Practice*. Oxford University Press, New York, 1996.
- [BFM97] T. Bäck, D.B. Fogel, and Z. Michalewicz, editors. *Handbook of Evolutionary Computation*. IOP Publishing Ltd., 1997.
- [BMF⁺99] R. P. Butler, G. W. Marcy, D. A. Fischer, T. M. Brown, A. R. Contos, S. G. Korzennik, P. Nisenson, and R. W. Noyes. Evidence for Multiple Companions to *v* Andromedae. *Astrophysical Journal*, 526:916–927, December 1999.
- [BNN⁺94] T. M. Brown, R. W. Noyes, P. Nisenson, S. G. Korzennik, and S. Horner. The AFOE: A spectrograph for precise Doppler studies. *Astronomical Society of the Pacific*, 106:1285–1297, December 1994.
- [BSPF00] J.M. Bull, L.A. Smith, L. Pottage, and R. Freeman. Benchmarking Java against C and Fortran for Scientific Applications. pages 97–105, Palo Alto, California, United States, 200. ACM Press.
- [BTM⁺01] R. P. Butler, C. G. Tinney, G. W. Marcy, H. R. A. Jones, A. J. Penny, and K. Apps. Two New Planets from the Anglo-Australian Planet Search. *Astrophysical Journal*, 555:410–417, July 2001.
- [CH94] W. D. Cochran and A. P. Hatzes. A high-precision radial-velocity survey for other planetary systems. *Astrophysics and Space Science*, 212:281–291, February 1994.
- [Cha95] P. Charbonneau. Genetic Algorithms in Astronomy and Astrophysics. *Astrophysical Journal Supplement*, 101:309 ff., December 1995.
- [CS00] P. M. Cincotta and C. Simó. Alternative Tools to Study Global and Local Dynamics-Application to Galactic Dynamics. In *The Chaotic Universe, Proceedings of the Second ICRA Network Workshop, Advanced Series in Astrophysics and Cosmology, vol.10, Edited by V. G. Gurzadyan and R. Ruffini, World Scientific, 2000, p.247*, page 247 ff., 2000.
- [ea05] R. Neuhäuser et. al. Evidence for a co-moving sub-stellar companion of GQ Lup. *Astronomy and Astrophysics*, April 2005.
- [End02] et. al Endl. Extrasolar terrestrial planets: Can we detect them already? *Scientific Frontiers in Research on Extrasolar Planets*, 2002.
- [exo] Kompetenzzentrum – Extrasolare Planeten. <http://exoplanet.de/>.
- [Fli03] T. Fließbach. *Mechanik*. Spektrum, 4. edition, 2003.
- [GKM03] K. Goździewski, M. Konacki, and A. J. Maciejewski. Where is the Second Planet in the HD 160691 Planetary System? *Astrophysical Journal*, 594:1019–1032, September 2003.
- [GKM05] K. Goździewski, M. Konacki, and A. J. Maciejewski. Orbital Solutions to the HD 160691 (μ Arae) Doppler Signal. *Astrophysical Journal*, 622:1136–1148, April 2005.

- [GW03a] E. Guenther and G. Wuchterl. Searching for Planets of Brown Dwarfs. In *IAU Symposium*, page 225 ff., June 2003.
- [GW03b] E. W. Guenther and G. Wuchterl. Companions of old brown dwarfs, and very low mass stars. *Astronomy and Astrophysics*, 401:677–683, April 2003.
- [HGKM03] A. P. Hatzes, E. Guenther, M. Kürster, and B. McArthur. The planet search program of the Thüringer Landessternwarte Tautenburg: searching for extrasolar planets from deep in the heart of Germany. In *ESA SP-539: Earths: DARWIN/TPF and the Search for Extrasolar Terrestrial Planets*, pages 441–445, October 2003.
- [Hol75] J.H. Holland. *Adaption in natural and artificial systems*. The University of Michigan Press, 1975.
- [HW05] A. P. Hatzes and G. Wuchterl. Astronomy: Giant planet seeks nursery place. *Nature*, 436:182–183, July 2005.
- [KER⁺03] M. Kuerster, M. Endl, F. Rouesnel, S. Els, A. Kaufer, S. Brilliant, A. P. Hatzes, and W. C. Cochran. Search for terrestrial planets in the habitable zone of M dwarfs with the VLT+EUVES. *Astronomische Nachrichten Supplement*, 324:4–+, 2003.
- [KHC⁺94] M. Kurster, A. P. Hatzes, W. D. Cochran, C. E. Pulliam, and K. Dennerl. A radial velocity search for extra-solar planets using an iodine gas absorption cell at the CAT+CES. *The Messenger*, 76:51–55, 1994.
- [Kon05] M. Konacki. An extrasolar giant planet in a close triple-star system. *Nature*, 436:230–233, July 2005.
- [LC95] T. J. W. Lazio and J. Cordes. Genetic Algorithms: Searching for Planets Around Pulsars. In *ASP Conf. Ser. 72: Millisecond Pulsars. A Decade of Surprise*, page 391 ff., 1995.
- [LC01] G. Laughlin and J. E. Chambers. Short-Term Dynamical Interactions among Extrasolar Planets. *The Astrophysical Journal*, 551:L109–L113, April 2001.
- [LC02] G. Laughlin and J. E. Chambers. Extrasolar Trojans: The Viability and Detectability of Planets in the 1:1 Resonance. *The Astronomical Journal*, 124:592–600, July 2002.
- [LN04] J.P. Lewis and U. Neumann. Performance of Java versus C++. 2004.
- [MB92] G. W. Marcy and R. P. Butler. Precision radial velocities with an iodine absorption cell. *Astronomical Society of the Pacific*, 104:270–277, April 1992.
- [MB98] G. W. Marcy and R. P. Butler. Detection of Extrasolar Giant Planets. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 36:57–98, 1998.
- [MBF⁺02] G. W. Marcy, R. P. Butler, D. A. Fischer, G. Laughlin, S. S. Vogt, G. W. Henry, and D. Pourbaix. A Planet at 5 AU around 55 Cancri. *Astrophysical Journal*, 581:1375–1388, December 2002.
- [MBT⁺04] C. McCarthy, R. P. Butler, C. G. Tinney, H. R. A. Jones, G. W. Marcy, B. Carter, A. J. Penny, and D. A. Fischer. Multiple Companions to HD 154857 and HD 160691. *Astrophysical Journal*, 617:575–579, December 2004.

- [MBW⁺97] G. W. Marcy, R. P. Butler, E. Williams, L. Bildsten, J. R. Graham, A. M. Ghez, and J. G. Jernigan. The Planet around 51 Pegasi. *Astrophysical Journal*, 481:926 ff., May 1997.
- [MCM00] G. W. Marcy, W. D. Cochran, and M. Mayor. Extrasolar Planets around Main-Sequence Stars. *Protostars and Planets IV*, page 1285 ff., May 2000.
- [MMPS93] R. S. McMillan, T. L. Moore, M. L. Perry, and P. H. Smith. Radial velocity observations of the sun at night. *Astrophysical Journal*, 403:801–809, February 1993.
- [MMPS94] R. S. McMillan, T. L. Moore, M. L. Perry, and P. H. Smith. Long, accurate time series measurements of radial velocities of solar-type stars. *Astrophysics and Space Science*, 212:271–280, February 1994.
- [MN05] M. Mugrauer and R. Neuhaeuser. Gl86B: a white dwarf orbits an exoplanet host star. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 361:L15–L19, July 2005.
- [MQ95] M. Mayor and D. Queloz. A Jupiter-Mass Companion to a Solar-Type Star. *Nature*, 378:355 ff., November 1995.
- [MSP⁺90] R. S. McMillan, P. H. Smith, M. L. Perry, T. L. Moore, and W. J. Merline. Long-term stability of a Fabry-Perot interferometer used for measurement of stellar Doppler shift. In *Instrumentation in astronomy VII; Proceedings of the Meeting, Tucson, AZ, Feb. 13-17, 1990 (A91-29601 11-35)*. Bellingham, WA, Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers, 1990, p. 601-609., pages 601–609, July 1990.
- [NJK⁺97] R. W. Noyes, S. Jha, S. G. Korzennik, M. Krockenberger, P. Nisenson, T. M. Brown, E. J. Kennelly, and S. D. Horner. A Planet Orbiting the Star Rho Coronae Borealis. *The Astrophysical Journal*, 483:L111+, July 1997.
- [PHB⁺96] J. B. Pollack, O. Hubickyj, P. Bodenheimer, J. J. Lissauer, M. Podolak, and Y. Greenzweig. Formation of the Giant Planets by Concurrent Accretion of Solids and Gas. *Icarus*, 124:62–85, November 1996.
- [PR02] M. Pätzold and H. Rauer. Where Are the Massive Close-in Extrasolar Planets? *The Astrophysical Journal*, 568:L117–L120, April 2002.
- [PTVF92] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical recipes in C. The art of scientific computing*. Cambridge: University Press, —c1992, 2nd ed., 1992.
- [Rec73] I. Rechenberg. *Evolutionstrategie: Optimierung technischer Systeme nach Prinzipien der biologischen Evolution*. Frommann-Holzboog, 1973.
- [Ros71] F. Rosenblatt. A Two-Color Photometric Method for Detection of Extra solar Planetary Systems. *Icarus*, 14:71 ff., February 1971.
- [RY02] Thomas Philip Runarsson and Xin Yao. Continuous selection and self-adaptive evolution strategies. In David B. Fogel, Mohamed A. El-Sharkawi, Xin Yao, Garry Greenwood, Hitoshi Iba, Paul Marrow, and Mark Shackleton, editors, *Proceedings of the 2002 Congress on Evolutionary Computation CEC2002*, pages 279–284. IEEE Press, 2002.

- [Sch] J. Schneider. The extrasolar planets encyclopaedia. <http://cfa-www.harvard.edu/planets/encycl.html>.
- [Sch65] H.-P. Schwefel. Kybernetische Evolution als Strategie der experimentellen Forschung in der Strömungstechnik. Master's thesis, Technische Universität Berlin, 1965.
- [Sch75] H.-P. Schwefel. *Evolutionstrategie und numerische Optimierung*. PhD thesis, Technische Universität Berlin, 1975.
- [Sch77] H.-P. Schwefel. Numerische Optimierung von Computer-Modellen mittels der Evolutionsstrategie. In Birkhäuser, editor, *Interdisciplinary Systems Research*, volume 26. n/a, Basel, 1977.
- [Sch81] H.-P. Schwefel. *Numerical Optimization of Computer Models*. Wiley, Chichester, 1981.
- [SIM⁺03] N. C. Santos, G. Israelian, M. Mayor, R. Rebolo, and S. Udry. Statistical properties of exoplanets. II. Metallicity, orbital parameters, and space velocities. *Astronomy and Astrophysics*, 398:363–376, January 2003.
- [Str52] O. Struve. Proposal for a project of high-precision stellar radial velocity work. *The Observatory*, 72:199–200, October 1952.
- [TL05] E. W. Thommes and J. J. Lissauer. Planet migration. In *Astrophysics of Life*, pages 41–53, 2005.
- [UB99] A. Unsöld and B. Baschek. *Der neue Kosmos*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 6. edition, 1999.
- [Überhuber] C. Überhuber. Grundlagen der Numerik. Skriptum (TU Wien).
- [UMS03] S. Udry, M. Mayor, and N. C. Santos. Statistical properties of exoplanets. I. The period distribution: Constraints for the migration scenario. *Astronomy and Astrophysics*, 407:369–376, August 2003.
- [Voi91] H.H. Voigth. *Abriss der Astronomie*. B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim/Wien/Zürich, 5. edition, 1991.
- [Wam04] J. Wambsganss. Auf der Suche nach Planeten bei anderen Sternen. *Sterne und Weltraum*, Dossier Planetensysteme(1):70 ff., 2004.
- [Wuc00] G. Wuchterl. Extrasolar Giant Planets: Masses and Luminosities from In-Situ Formation Theories. In *From Extrasolar Planets to Cosmology: The VLT Opening Symposium, Proceedings of the ESO Symposium held at Antofagasta, Chile, 1-4 March 1999. Edited by Jacqueline Bergeron and Alvio Renzini. Berlin: Springer-Verlag, 2000. p. 408.*, page 408 ff., 2000.
- [Wuc03] G. Wuchterl. Planet formation - is the solar system misleading?, 2003.
- [Wuc04] G. Wuchterl. Was ist ein Planet? *Sterne und Weltraum*, Dossier Planetensysteme(1):30 ff., 2004.
- [WWI⁺95] G. A. H. Walker, A. R. Walker, A. W. Irwin, A. M. Larson, S. L. S. Yang, and D. C. Richardson. Search for Jupiter-Mass Companions (Walker+, 1995). *VizieR Online Data Catalog*, 3185:0 ff., May 1995.

- [ZM02] S. Zucker and T. Mazeh. On the Mass-Period Correlation of the Extrasolar Planets. *The Astrophysical Journal*, 568:L113–L116, April 2002.

Curriculum Vitae

Ich, Andreas Chwatal, wurde am 11. Mai 1979 in Wien geboren. Am 2. Juni 1997 habe ich am Bundesrealgymnasium Wien 14 maturiert. Anschliessend immatrikulierte ich an der TU Wien, und inskribierte das Studium Informatik. In der Zeit von Juni 1998 bis Juni 1999 leistete ich meinen Zivildienst beim Arbeiter-Samariter-Bund Österreichs ab, wo ich anschliessend noch 4 Monate hauptberuflich tätig war.

Im Wintersemester 1999 setzte ich mein Informatikstudium an der TU Wien fort. Seit Jänner 2000 arbeite ich für Hewlett-Packard im Bereich Datenbanken und interne Entwicklung, zwischendurch manchmal für die Bank Austria. Im Wintersemester 2001 inskribierte ich "Astronomie" als Zweitstudium an der Universität Wien. Seit diesem Zeitpunkt bin ich an der Kuffner-Sternwarte Wien ehrenamtlich im Bereich der astronomischen Volksbildung tätig.

Im Februar 2002 wechselte ich in den neuen Studienplan, in das Bakkalaureatsstudium "Software and Information Engineering", welches ich am 31. März 2003 abgeschlossen habe. Erste Erfahrungen am Gebiet der beobachtenden Astronomie konnte ich im Sommer 2002 im Zuge eines Planetensuch-Projektes als Beobachter an der Thüringer Landessternwarte (Karl-Schwarzschild-Observatorium) erwerben. Im Dezember 2003 habe ich den ersten Abschnitt des Astronomiestudiums abgeschlossen.

Seit Ende 2004 arbeite ich neben meiner Tätigkeit bei HP auch selbstständig im Bereich IT-Dienstleistungen.

Adresse: Heinrich-Collinstraße 8-14/9/21
1140 Wien, Österreich